8 Polynômes

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera soit l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, soit l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$.

8.1 Généralités sur les polynômes

8.1.1 Définition d'un polynôme

Définition 8.1

On appelle *monôme* (d'indéterminée X) toute expression de la forme

Si $k = 0$, on note plutôt $X^0 = 1$ et $aX^0 = a$.

On appelle alors *polynôme* (d'indéterminée X)

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes d'indéterminée X.

Exemple : sont des polynômes.

Proposition 8.2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors il existe un entier n et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P =$$

Les a_k sont appelés

L'usage veut qu'on écrive les polynômes dans l'ordre croissant ou décroissant des puissances des monômes.

Nota : Attention, toutes les puissances de monômes qui apparaissent dans un polynômes doivent être positives ; il n'existe pas de puissances de X négatives.

Définition 8.3

On appelle :

- *polynôme nul*
- *polynôme unité*

Définition 8.4

Deux polynômes sont égaux En particulier, un polynôme est nul si et seulement si

EXEMPLE : Ainsi, les polynômes $aX^2 + bX + c$ et $dX^2 + eX + f$ sont égaux si et seulement si

Définition 8.5

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On appelle *degré* de P .
On note le degré de P, et par convention, $\deg(0) =$.

On appelle *coefficient dominant* de P

On dit qu'un polynôme est *unitaire* si

On dit qu'un polynôme est *constant* si

On note alors $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

NOTA : Deux polynômes égaux ont le même degré, et deux polynômes n'ayant pas le même degré ne sont pas égaux.

Attention, si on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, cela ne signifie pas que $\deg(P) = n$. On sait seulement que $\deg(P) \leqslant n$, et que $\deg(P) = n \Leftrightarrow a_n \neq 0$.

8.1.2 Opérations sur les polynômes

Définition 8.6

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ des polynômes, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- on appelle *somme* de P et Q le polynôme

$$P + Q =$$

- on appelle *produit* de P par λ le polynôme

$$\lambda P =$$

- on appelle *produit* de P et Q le polynôme

$$PQ =$$

EXEMPLE : Soient $P = 2X^2 + 1$ et $Q = 3X^3 - X^2 + 2X + 1$. Alors

- $P + Q =$
- $3P =$
- $PQ =$

Proposition 8.7

Soient P, Q et R des polynômes. Alors

- $P \times 0 =$
- $PQ = 0 \Rightarrow$
- si $P \neq 0$, alors

Proposition 8.8

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

-

-
-

Proposition 8.9

Les égalités remarquables sont vraies sur $\mathbb{K}[X]$. Si $n \geqslant 1$:

$$(P+Q)^n =$$

$$P^n - Q^n =$$

Définition 8.10

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On appelle *composée de P et Q* le polynôme

$$P \circ Q =$$

où $P =$.

NOTA : Attention, la composition n'est pas commutative.

EXEMPLE : La composée de X^2 et $X+1$ est

Proposition 8.11

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors

Définition 8.12

On définit la *dérivée* d'un polynôme par

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)' =$$

EXEMPLE : La dérivée de X^2 est , la dérivée de $3X^3 - 1$ est et la dérivée de 1 est

Proposition 8.13

La dérivation est linéaire, *i.e.*

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda P + Q)' =$$

On a aussi

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ (PQ)' =$$

Proposition 8.14

Pour tout polynôme P de degré au moins 1, on a $\deg(P') =$. Si $\deg(P) =$ 0 ou $-\infty$, alors $\deg(P') =$.

Définition 8.15

On définit la *dérivée k-ième* d'un polynôme P par récurrence :

-
-

EXEMPLE (À CONNAÎTRE) : Pour tous entiers $n \geqslant p$, on a

$(X^n)^{(p)} =$

Proposition 8.16

Si $k \leqslant \deg(P)$, alors

$$\deg(P^{(k)}) =$$

Si $k > \deg(P)$, alors

$$P^{(k)} =$$

Théorème 8.17 – Formule de Taylor

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$P =$$

8.2 Fonctions polynomiales

Définition 8.18

Soit $P = \sum a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle *application polynomiale associée à P* l'application

NOTA : En pratique, on a tendance à donner le même nom au polynôme P et à l'application polynomiale associée.

Il y a en fait une bijection entre les polynômes et les applications polynomiales.

Toutes les opérations sur les polynômes se transmettent de la même façon aux applications polynomiales :

- si $R = P + Q$, alors
- si $R = P \circ Q$, alors
- *etc.*

NOTA : On note qu'en particulier, on identifie les éléments de $\mathbb{K}$ avec les polynômes de degré négatif ou nul : $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[X]$. Sous cette identification, on a alors si $a \in \mathbb{K}$ (ou $a \in \mathbb{K}_0[X]$)

Dorénavant, on notera X la fonction identité de $\mathbb{K}$, pour unifier les deux notions de polynôme et de fonction polynomiale.

8.3 Racines d'un polynôme

Définition 8.19

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une *racine* de P si

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est une *racine de multiplicité k* de P si

EXEMPLE : On peut écrire $X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X^2+1)$, donc est racine de ce polynôme.

Si on travaille sur $\mathbb{C}$, on peut continuer en

$$X^3 + X^2 + X + 1 =$$

et donc et sont aussi racines.

On peut écrire $X^7 - 3X^6 + 5X^5 - 7X^4 + 7X^3 - 5X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3(X^2+1)^2$, donc est racine de multiplicité

Sur $\mathbb{C}$, on a donc $X^7 - 3X^6 + 5X^5 - 7X^4 + 7X^3 - 5X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3(X-i)^2(X+i)^2$, et donc et sont racines de multiplicité

Théorème 8.20

$a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si

On utilise souvent le théorème précédent pour factoriser des expressions.

Théorème 8.21

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors a est racine de P de multiplicité k si et seulement si

Démonstration. Supposons que a est racine de P de multiplicité k. Montrons le résultat par récurrence sur k :

- si $k = 1$,
- supposons le résultat vrai pour un k. Soit a de multiplicité $k+1$. Alors on peut écrire $P = (X-a)^{(k+1)}Q$ où a n'est pas racine de Q. Alors

  $P' =$

où a n'est pas racine de R. Par hypothèse de récurrence, on a donc
pour tout i entre 0 et $k-1$. En ajoutant que $P(a) = 0$, on a le résultat voulu.

Inversement, supposons que toutes les dérivées de P s'annulent en a jusqu'au rang k. La formule de Taylor de P en a s'écrit donc

$$P =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$P^{(k)}(a)$ étant non nul, a n'est pas racine de Q. □

Corollaire 8.22

Soit P un polynôme non nul. Soient $a_1, \dots, a_p$ les racines de P, de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Alors

Autrement dit, le nombre de racines, comptées avec multiplicité, d'un polynôme est inférieur à son degré.

Méthode

Pour montrer qu'un polynôme est nul, on peut au choix :

-
-
-

EXEMPLE : La fonction sin n'est pas polynomiale. Sinon, soit P le polynôme associé. Alors

EXERCICE : Déterminer tous les polynômes P tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = P(x)$.

8.3.1 Théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème 8.23 – de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme complexe non constant

NOTA : On dit que $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos*.

Corollaire 8.24

Tout polynôme complexe non nul

Corollaire 8.25

Tout polynôme P complexe se factorise en

$$P =$$

où $\lambda \in C$, et les a_i sont racines de P de multiplicité α_i.

NOTA : Attention, ce résultat n'est vrai que pour les polynômes complexes. Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut ne pas avoir de racine ; par exemple, $X^2 + 1$ vu comme polynôme de $\mathbb{R}[X]$ n'admet pas de racines, mais il admet bien deux racines si on le voit comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

On a par contre le résultat suivant :

Proposition 8.26

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, et soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P. Alors

EXERCICE : Démontrer cette proposition.

En utilisant cette propriété, et en factorisant un polynôme réel sur $\mathbb{C}$, on peut en déduire en rassemblant les racines conjuguées une factorisation sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE : Soit $P = X^4 + 1$. Alors, sur $\mathbb{C}$, les racines de P sont
On a donc

$$P =$$
$$=$$
$$=$$

8.3.2 Relations coefficients-racines

Nous travaillons dans cette section avec des polynômes complexes (ou des polynômes réels pouvant s'écrire comme produit de polynômes de degré 1).

Si P est de degré 2, on peut écrire, si r_1 et r_2 sont les racines de P :

$$P = aX^2 + bX + c = a(X - r_1)(X - r_2) = aX^2 - a(r_1 + r_2)X + ar_1r_2.$$

En identifiant les coefficients, on a donc

$$r_1 + r_2 =$$

$$r_1r_2 =$$

Faisons la même chose si P est de degré 3 :

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - r_1)(X - r_2)(X - r_3).$$

En développant et en identifiant, on a donc

$$r_1 + r_2 + r_3 =$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 =$$

$$r_1r_2r_3 =$$

De façon générale, on peut énoncer :

Proposition 8.27

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme complexe de degré n, et soient $r_1, \dots, r_n$ (comptées éventuellement plusieurs fois). Alors

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \qquad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} r_i =$$

8.4 Exercices

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

- $Q^2 = XP^2$ d'inconnues $P, Q \in \mathbb{K}[X]$
- $P \circ P = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$
- $P(X^2) = (X^2+1)P$

Exercice 2

On définit une suite de polynômes $(P_n)_n$ par

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = X \\ \forall n,\ P_{n+2} = XP_{n+1} + \left(1 - \frac{1}{4}X^2\right) P_n \end{cases}$$

1. Calculer P_2 et P_3.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré inférieur ou égal à n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le coefficient d'indice n de P_n.
   a) Donner les valeurs de a_i pour $i \in \{0,1,2,3\}$.
   b) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n.$$
   c) En déduire une expression de a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis le degré du polynôme P_n.

Exercice 3

Factoriser les polynômes suivants :

a) $X^4 - X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

b) $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

c) $X^6 + X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$

d) $X^6 - 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 3X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$, sachant que i est racine complexe

Exercice 4

Déterminer le nombre de racines réelles de

$$P_n = nX^n - X^{n-1} - \cdots - X - 1.$$

Exercice 5

Montrer qu'un polynôme complexe non constant est surjectif.

Exercice 6

Montrer qu'un polynôme complexe P tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \in \mathbb{R}$ est en fait à coefficients réels.

Exercice 7

On considère l'ensemble de polynômes de $\mathbb{C}[X]$

$$E = \{a(X^2 - bX + 1) \mid a, b \in \mathbb{C}\}.$$

1. Montrer que pour tout polynôme non nul de E, ses racines sont inverses l'une de l'autre.
2. À quelle condition sur $b \in \mathbb{R}$ ne peut-on pas factoriser $X^2 - bX + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$?
3. Montrer que le produit de deux polynômes non nuls de E est un polynôme palindrome de degré 4, c'est-à-dire qu'il s'écrit

$$\alpha X^4 + \beta X^3 + \gamma X^2 + \beta X + \alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

4. Réciproquement, montrer que tout polynôme palindrome de degré 4 est le produit de deux polynômes non nuls de E, l'un d'eux étant unitaire.

Exercice 8

On cherche dans cet exercice à déterminer l'ensemble $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{C}[X]$ des polynômes factorisables par leur dérivée :

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \exists Q \in \mathbb{C}[X],\ P = QP'\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{C}_0[X] \cap \mathcal{E} = \{0\}$.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 1$, montrer que $\lambda(X - \alpha)^n$ est dans $\mathcal{E}$.
3. Soit $P \in \mathcal{E}$ non constant, et soit Q tel que $P = QP'$. On pose $n = \deg(P)$.
   a) Calculer le degré de Q.
   b) Montrer qu'il existe α tel que
   $$P = \frac{1}{n}(X - \alpha)P'.$$
   c) Montrer par récurrence que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,
   $$P^{(k)} = \frac{1}{n-k}(X - \alpha)P^{(k+1)}.$$
   d) Calculer $P^{(k)}(\alpha)$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Que peut-on dire de α ?
   e) Montrer alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P = \lambda(X - \alpha)^n$.

4. Conclure : déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.

Exercice 9

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Montrer que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$L_i(a_i) = 1 \text{ et } L_i(a_j) = 0 \ \forall j \neq i.$$