8 Polynômes

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera soit l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, soit l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$.

8.1 Généralités sur les polynômes

8.1.1 Définition d'un polynôme

Définition 8.1

On appelle *monôme* (d'indéterminée X) toute expression de la forme

$$aX^k,\ a \in \mathbb{K},\ k \in \mathbb{N}.$$

Si $k = 0$, on note plutôt $X^0 = 1$ et $aX^0 = a$.

On appelle alors *polynôme* (d'indéterminée X) toute somme finie de monôme.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes d'indéterminée X.

Exemple : $1, 2X, 3X + 4X^5 + X^{1000}$ sont des polynômes.

Proposition 8.2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors il existe un entier n et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Les a_k sont appelés *coefficients de P*.

L'usage veut qu'on écrive les polynômes dans l'ordre croissant ou décroissant des puissances des monômes.

Nota : Attention, toutes les puissances de monômes qui apparaissent dans un polynômes doivent être positives ; il n'existe pas de puissances de X négatives.

Définition 8.3

On appelle :

- *polynôme nul* le polynôme dont tous les coefficients sont nuls
- *polynôme unité* le polynôme 1

Définition 8.4

Deux polynômes sont égaux s'ils ont les mêmes coefficients. En particulier, un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

EXEMPLE : Ainsi, les polynômes $aX^2 + bX + c$ et $dX^2 + eX + f$ sont égaux si et seulement si $a = d$, $b = e$ et $c = f$.

Définition 8.5

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On appelle *degré* de P le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. On note $\deg(P)$ le degré de P, et par convention, $\deg(0) = -\infty$.

On appelle *coefficient dominant* de P le coefficient de $X^{\deg(P)}$.

On dit qu'un polynôme est *unitaire* si son coefficient dominant est 1.

On dit qu'un polynôme est *constant* si son degré est inférieur ou égal à 0.

On note alors $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

NOTA : Deux polynômes égaux ont le même degré, et deux polynômes n'ayant pas le même degré ne sont pas égaux.

Attention, si on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, cela ne signifie pas que $\deg(P) = n$. On sait seulement que $\deg(P) \leqslant n$, et que $\deg(P) = n \Leftrightarrow a_n \neq 0$.

8.1.2 Opérations sur les polynômes

Définition 8.6

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ des polynômes, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- on appelle *somme* de P et Q le polynôme

$$P+Q=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)X^k.$$

- on appelle *produit* de P par λ le polynôme

$$\lambda P=\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k)X^k.$$

- on appelle *produit* de P et Q le polynôme

$$PQ=\sum_{k=0}^{2n}c_kX^k,\ \text{ où } c_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}.$$

EXEMPLE : Soient $P=2X^2+1$ et $Q=3X^3-X^2+2X+1$. Alors

- $P+Q=3X^3+X^2+2X=2$
- $3P=6X^2+3$
- $PQ=(2X^2+1)(3X^3-X^2+2X+1)=6X^5-2X^4+7X^3+X^2+2X+1$

Proposition 8.7

Soient P, Q et R des polynômes. Alors

- $P\times 0=0$
- $PQ=0\Rightarrow P=0$ ou $Q=0$
- si $P\neq 0$, alors $PQ=PR\Rightarrow Q=R$.

Proposition 8.8

Soient $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Alors

- $\deg(P+Q)\leqslant\max(\deg(P),\deg(Q))$
- $\deg(\lambda P)=\begin{cases}-\infty & \text{si } \lambda=0\\ \deg(P) & \text{sinon}\end{cases}$
- $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$.

Proposition 8.9

Les égalités remarquables sont vraies sur $\mathbb{K}[X]$. Si $n \geqslant 1$:

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$

$$P^n - Q^n = (P-Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$$

Définition 8.10

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On appelle *composée de P et Q* le polynôme

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k,$$

où $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

NOTA : Attention, la composition n'est pas commutative.

EXEMPLE : La composée de X^2 et $X+1$ est $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$.

Proposition 8.11

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$.

Définition 8.12

On définit la *dérivée* d'un polynôme par

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k.$$

EXEMPLE : La dérivée de X^2 est $2X$, la dérivée de $3X^3 - 1$ est $9X^2$ et la dérivée de 1 est 0.

Proposition 8.13

La dérivation est linéaire, *i.e.*

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'.$$

On a aussi

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ (PQ)' = P'Q + PQ'.$$

Proposition 8.14

Pour tout polynôme P de degré au moins 1, on a $\deg(P') = \deg(P) - 1$. Si $\deg(P) = 0$ ou $-\infty$, alors $\deg(P') = -\infty$.

Définition 8.15

On définit la *dérivée k-ième* d'un polynôme P par récurrence :

- $P^{(0)} = P$
- $P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$

Exemple (à connaître) : Pour tous entiers $n \geqslant p$, on a

$$(X^n)^{(p)} = n(n-1)\cdots(n-p+1)X^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!}X^{n-p}.$$

Proposition 8.16

Si $k \leqslant \deg(P)$, alors

$$\deg(P^{(k)}) = \deg(P) - k.$$

Si $k > \deg(P)$, alors

$$P^{(k)} = 0.$$

Théorème 8.17 – Formule de Taylor

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$P = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{(X-a)^k}{k!} P^{(k)}(a).$$

8.2 Fonctions polynomiales

Définition 8.18

Soit $P = \sum a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle *application polynomiale associée à P* l'application

$$\widehat{P} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array} .$$

NOTA : En pratique, on a tendance à donner le même nom au polynôme P et à l'application polynomiale associée.

Il y a en fait une bijection entre les polynômes et les applications polynomiales.

Toutes les opérations sur les polynômes se transmettent de la même façon aux applications polynomiales :

- si $R = P + Q$, alors $\widehat{R} = \widehat{P} + \widehat{Q}$
- si $R = P \circ Q$, alors $\widehat{R} = \widehat{P} \circ \widehat{Q}$
- *etc.*

NOTA : On note qu'en particulier, on identifie les éléments de $\mathbb{K}$ avec les polynômes de degré négatif ou nul : $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[X]$. Sous cette identification, on a alors si $a \in \mathbb{K}$ (ou $a \in \mathbb{K}_0[X]$)

$$P(a) = P \circ a = \widehat{P}(a).$$

Dorénavant, on notera X la fonction identité de $\mathbb{K}$, pour unifier les deux notions de polynôme et de fonction polynomiale.

8.3 Racines d'un polynôme

Définition 8.19

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une *racine* de P si

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P = (X - a)Q.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est une *racine de multiplicité k* de P si

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P = (X - a)^k Q \quad \text{et} \quad a \text{ n'est pas racine de } Q$$

EXEMPLE : On peut écrire $X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X^2 + 1)$, donc -1 est racine de ce polynôme.

Si on travaille sur $\mathbb{C}$, on peut continuer en

$$X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X - i)(X + i),$$

et donc i et $-i$ sont aussi racines.

On peut écrire $X^7 - 3X^6 + 5X^5 - 7X^4 + 7X^3 - 5X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3(X^2+1)^2$, donc 1 est racine de multiplicité 3.

Sur $\mathbb{C}$, on a donc $X^7 - 3X^6 + 5X^5 - 7X^4 + 7X^3 - 5X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3(X-i)^2(X+i)^2$, et donc i et $-i$ sont racines de multiplicité 2.

Théorème 8.20

$a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si $P(a) = 0$.

On utilise souvent le théorème précédent pour factoriser des expressions.

Théorème 8.21

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors a est racine de P de multiplicité k si et seulement si

$$\forall i \in [\![0, k-1]\!],\ P^{(i)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(a) \neq 0.$$

Démonstration. Supposons que a est racine de P de multiplicité k. Montrons le résultat par récurrence sur k :

- si $k = 1$, on peut donc écrire $P = (X-a)Q$, où a n'est pas racine de Q. On a alors bien $P'(a) = Q(a) \neq 0$.
- supposons le résultat vrai pour un k. Soit a de multiplicité $k+1$. Alors on peut écrire $P = (X-a)^{(k+1)}Q$ où a n'est pas racine de Q. Alors

  $$P' = (k+1)(X-a)^kQ + (X-a)^{k+1}Q' = (X-a)^kR,$$

  où a n'est pas racine de R. Par hypothèse de récurrence, on a donc $P'^{(i)}(a) = 0$ pour tout i entre 0 et $k-1$. En ajoutant que $P(a) = 0$, on a le résultat voulu.

Inversement, supposons que toutes les dérivées de P s'annulent en a jusqu'au rang k. La formule de Taylor de P en a s'écrit donc

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{i=0}^{\deg P} \frac{(X-a)^i}{i!} P^{(i)}(a) \\
&= \sum_{i=k}^{\deg P} \frac{(X-a)^i}{i!} P^{(i)}(a) \\
&= (X-a)^k \sum_{i=0}^{\deg P} \frac{(X-a)^i}{i!} P^{(i+k)}(a) \\
&= (X-a)^k Q
\end{aligned}$$

$P^{(k)}(a)$ étant non nul, a n'est pas racine de Q. □

Corollaire 8.22

Soit P un polynôme non nul. Soient $a_1, \ldots, a_p$ les racines de P, de multiplicités respectives $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Alors

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha p \leqslant \deg P.$$

Autrement dit, le nombre de racines, comptées avec multiplicité, d'un polynôme est inférieur à son degré.

Méthode

Pour montrer qu'un polynôme est nul, on peut au choix :

- montrer que tous ses coefficients sont nuls
- montrer qu'il admet une infinité de racines
- montrer qu'il admet plus de racines que son degré

EXEMPLE : La fonction sin n'est pas polynomiale. Sinon, soit P le polynôme associé. Alors tous les $k\pi$ sont racines de P, et donc admettant une infinité de racines, $P = 0$. D'où une contradiction.

EXERCICE : Déterminer tous les polynômes P tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = P(x)$.

8.3.1 Théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème 8.23 – de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme complexe non constant admet une racine.

NOTA : On dit que $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos*.

Corollaire 8.24

Tout polynôme complexe non nul admet autant de racines (comptées avec multiplicité) que son degré.

Corollaire 8.25

Tout polynôme P complexe se factorise en

$$P = \lambda \prod (X - a_i)^{\alpha_i},$$

où $\lambda \in C$, et les a_i sont racines de P de multiplicité α_i.

Nota : Attention, ce résultat n'est vrai que pour les polynômes complexes. Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut ne pas avoir de racine ; par exemple, $X^2 + 1$ vu comme polynôme de $\mathbb{R}[X]$ n'admet pas de racines, mais il admet bien deux racines si on le voit comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

On a par contre le résultat suivant :

Proposition 8.26

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, et soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P. Alors $\bar{c}$ est une racine de P.

Exercice : Démontrer cette proposition.

En utilisant cette propriété, et en factorisant un polynôme réel sur $\mathbb{C}$, on peut en déduire en rassemblant les racines conjuguées une factorisation sur $\mathbb{R}$.

Exemple : Soit $P = X^4 + 1$. Alors, sur $\mathbb{C}$, les racines de P sont $e^{i\pi/4}$, $e^{3i\pi/4}$, $e^{-3i\pi/4}$ et $e^{-i\pi/4}$. On a donc

$$\begin{aligned} P &= \left(X - e^{i\pi/4}\right)\left(X - e^{-i\pi/4}\right)\left(X - e^{3i\pi/4}\right)\left(X - e^{-i\pi/4}\right) \\ &= (X^2 - 2\cos(\pi/4) + 1)(X^2 - 2\cos(3\pi/4) + 1) \\ &= (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \end{aligned}$$

8.3.2 Relations coefficients-racines

Nous travaillons dans cette section avec des polynômes complexes (ou des polynômes réels pouvant s'écrire comme produit de polynômes de degré 1).

Si P est de degré 2, on peut écrire, si r_1 et r_2 sont les racines de P :

$$P = aX^2 + bX + c = a(X - r_1)(X - r_2) = aX^2 - a(r_1 + r_2)X + ar_1r_2.$$

En identifiant les coefficients, on a donc

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= -\frac{b}{a} \\ r_1r_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Faisons la même chose si P est de degré 3 :

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - r_1)(X - r_2)(X - r_3).$$

En développant et en identifiant, on a donc

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= -\frac{b}{a} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 &= \frac{c}{a} \\ r_1 r_2 r_3 &= -\frac{d}{a} \end{aligned}$$

De façon générale, on peut énoncer :

Proposition 8.27

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme complexe de degré n, et soient $r_1, \ldots, r_n$ (comptées éventuellement plusieurs fois). Alors

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} r_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

8.4 Exercices

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

- $Q^2 = XP^2$ d'inconnues $P, Q \in \mathbb{K}[X]$
- $P \circ P = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$
- $P(X^2) = (X^2+1)P$

Réponse de l'exercice

1. Supposons que P et Q sont non nuls. Le degré de Q^2 est $2\deg(Q)$, et celui de XP^2 est $1+2\deg(P)$. C'est donc impossible. Donc $Q=0$ ou $P=0$, et donc l'autre aussi.
2. Le polynôme nul est solution, supposons donc P non nul. Notons que $\deg(P\circ P) = \deg(P)^2$. On doit donc avoir $\deg(P)^2 = \deg(P)$, et donc $\deg(P) \leqslant 1$.
   Si $P = aX+b$, alors $P\circ P = a^2X + ab + b$, et on doit donc avoir
   $$a^2 = a \quad \text{et} \quad ab = 0.$$
   Donc $(a,b) = (1,0)$ ou $(0,b)$, et donc $P = X$ ou P est constant.
   Réciproquement, les polynômes constants et X sont solutions.
3. Le polynôme nul est solution ; écartons-le. On a alors
   $$2\deg(P) = \deg(P) + 2,$$
   et donc $\deg(P) = 2$. On écrit donc $P = aX^2+bX+c$, et on a alors en développant
   $$aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c.$$
   En identifiant les coefficients, on a donc
   $$b = 0 \quad \text{et} \quad c = -a.$$
   Réciproquement, les $aX^2 - a$ sont bien solution.

Exercice 2

On définit une suite de polynômes $(P_n)_n$ par

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = X \\ \forall n,\ P_{n+2} = XP_{n+1} + \left(1 - \frac{1}{4}X^2\right) P_n \end{cases}$$

1. Calculer P_2 et P_3.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré inférieur ou égal à n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le coefficient d'indice n de P_n.
   a) Donner les valeurs de a_i pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.
   b) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n.$$
   c) En déduire une expression de a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis le degré du polynôme P_n.

Réponse de l'exercice

1. On a $P_2 = \frac{3}{4}X^2 + 1$ et $P_3 = \frac{1}{2}X^3 + 2X$.
2. Montrons-le par récurrence. Pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est évident. Supposons que $\deg(P_n) \leqslant n$ et $\deg(P_{n+1}) \leqslant n+1$. Alors
$$\begin{aligned}\deg(P_{n+2}) &= \deg\left(XP_{n+1} + \left(1 - \frac{1}{4}X^2\right)P_n\right)\\ &\leqslant \max\left(\deg(P_{n+1}) + 1, \deg(P_n) + 2\right)\\ &\leqslant n+2\end{aligned}$$
3. a) On a donc $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{4}$ et $a_3 = \frac{1}{2}$.
   b) C'est évident par calcul direct.
   c) On a donc une suite linéaire récurrente d'ordre 2, de polynôme caractéristique $r^2 - r + \frac{1}{4}$. Il admet $r = \frac{1}{2}$ comme unique racine, et on a donc
   $$a_n = (an + b)\frac{1}{2^n}.$$
   Les valeurs de a_0 et a_1 donnent $a = b = 1$.

Exercice 3

Factoriser les polynômes suivants :

a) $X^4 - X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

b) $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

c) $X^6 + X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$

d) $X^6 - 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 3X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$, sachant que i est racine complexe

Réponse de l'exercice

1. $P = \left(X - e^{\frac{i\pi}{6}}\right)\left(X - e^{\frac{-i\pi}{6}}\right)\left(X + e^{\frac{i\pi}{6}}\right)\left(X + e^{-\frac{i\pi}{6}}\right)$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $P = (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. $P = (X-1)^2(X-i)(X+i)$ sur $\mathbb{C}[X]$ et $P = (X-1)^2(X^2+1)$ sur $\mathbb{R}[X]$.
3. $P = (X^3 - e^{2i\pi/3})(X^3 - e^{-2i\pi/3})$
$= \left(X - e^{2i\pi/9}\right)\left(X - e^{-2i\pi/9}\right)\left(X - e^{4i\pi/9}\right)\left(X - e^{-4i\pi/9}\right)\left(X - e^{8i\pi/9}\right)\left(X - e^{-8i\pi/9}\right).$

4. i racine simple, donc $-i$ aussi. 1 est racine double évidente, et on trouve 2 et -1 pour les deux dernières racines.

Exercice 4

Déterminer le nombre de racines réelles de

$$P_n = nX^n - X^{n-1} - \cdots - X - 1.$$

Réponse de l'exercice

On prend $n \geqslant 2$. On a alors

$$P_n = (X-1)(nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + \cdots + 2X + 1) = (X-1)Q_n'$$

où $Q_n = X^n + \cdots + X + 1$.

On a donc, en repassant au fonctions

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\ Q_n(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1},$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\ Q_n'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Soit la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 \end{array}.$$

Alors φ est dérivable, et $\varphi'(x) = n(n+1)x^{n-1}(x-1)$.

- Si n est impair, alors φ est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement croissante sur $[1, \infty[$. $\varphi(1) = 0$, donc φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
- Si n est pair, alors φ est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$, strictement décroissante sur $[0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, \infty[$. Comme $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = 0$, φ s'annule une unique autre fois.

Finalement, si n est pair, P_n a deux racines réelles, et si n est impair, P_n a une racine réelle.

Exercice 5

Montrer qu'un polynôme complexe non constant est surjectif.

Réponse de l'exercice

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $P - z$ admet une racine (théorème de d'Alembert-Gauss), et donc il existe $u \in \mathbb{C}$ tel que $(P-z)(u) = P(u) - z = 0$.

Exercice 6

Montrer qu'un polynôme complexe P tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \in \mathbb{R}$ est en fait à coefficients réels.

Réponse de l'exercice

Si $P = \sum a_k X^K$, appelons $\overline{P} = \sum \overline{a_k} X^k$.

On vérifie simplement que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z}).$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(x) &= \overline{P(x)} \\ &= \overline{P}(\overline{x}) \\ &= \overline{P}(x) \end{aligned}$$

Tout réel est donc racine de $P - \overline{P}$, et donc $P = \overline{P}$, autrement dit P est à coefficients réels.

Exercice 7

On considère l'ensemble de polynômes de $\mathbb{C}[X]$

$$E = \{a(X^2 - bX + 1) \mid a, b \in \mathbb{C}\}.$$

1. Montrer que pour tout polynôme non nul de E, ses racines sont inverses l'une de l'autre.
2. À quelle condition sur $b \in \mathbb{R}$ ne peut-on pas factoriser $X^2 - bX + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$?
3. Montrer que le produit de deux polynômes non nuls de E est un polynôme palindrome de degré 4, c'est-à-dire qu'il s'écrit

$$\alpha X^4 + \beta X^3 + \gamma X^2 + \beta X + \alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

4. Réciproquement, montrer que tout polynôme palindrome de degré 4 est le produit de deux polynômes non nuls de E, l'un d'eux étant unitaire.

Réponse de l'exercice

1. Soit $P_b = X^2 - bX + 1$. D'après les relations coefficients-racines, le produit des deux racines de P_b est égal à 1, et donc elles sont inverses l'une de l'autre.
2. Soit $b \in \mathbb{R}$. Le discriminant de P_b est $\Delta_b = b^2 - 4$. Ainsi, on peut le factoriser dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $|b| \geqslant 2$.
3. Soient $P_1 = aP_b$ et $P_2 = cP_d$. Alors

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= ac(X^2 - bX + 1)(X^2 - dX + 1) \\ &= ac(X^4 - (b+d)X^3 + (2+bd)X^2 - (b+d)X + 1) \end{aligned}$$

4. Soit

$$P = \alpha X^4 + \beta X^3 + \gamma X^2 + \beta X + \alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

Soient $P_1 = P_b$ et $P_2 = cP_d$. Alors

$$P_1P_2 = c(X^4 - (b+d)X^3 + (2+bd)X^2 - (b+d)X + 1)$$

Par identification, on a donc

$$\alpha = c, \ -\frac{\beta}{c} = b + d, \ \frac{\gamma}{c} - 2 = bd.$$

On peut donc prendre $c = \alpha$, et b et d les racines de $X^2 + \frac{\beta}{\alpha}X + \frac{\gamma}{\alpha} - 2$.

Exercice 8

On cherche dans cet exercice à déterminer l'ensemble $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{C}[X]$ des polynômes factorisables par leur dérivée :

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \exists Q \in \mathbb{C}[X],\ P = QP'\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{C}_0[X] \cap \mathcal{E} = \{0\}$.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 1$, montrer que $\lambda(X-\alpha)^n$ est dans $\mathcal{E}$.
3. Soit $P \in \mathcal{E}$ non constant, et soit Q tel que $P = QP'$. On pose $n = \deg(P)$.
   a) Calculer le degré de Q.
   b) Montrer qu'il existe α tel que
   $$P = \frac{1}{n}(X-\alpha)P'.$$
   c) Montrer par récurrence que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,
   $$P^{(k)} = \frac{1}{n-k}(X-\alpha)P^{(k+1)}.$$
   d) Calculer $P^{(k)}(\alpha)$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Que peut-on dire de α ?
   e) Montrer alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P = \lambda(X-\alpha)^n$.
4. Conclure : déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.

Réponse de l'exercice

1. Le polynôme nul est clairement dans $\mathcal{E}$. Réciproquement, soit $P \in \mathcal{E}$ un polynôme constant. Alors $P' = 0$, et donc $P = 0$.
2. Posons $P_n = \lambda(X-\alpha)^n$. Alors
   $$P_n' = \lambda n(X-\alpha)^{n-1},$$
   et donc
   $$P_n = \frac{1}{n}(X-\alpha)P_n' \in \mathcal{E}.$$
3. a) L'égalité polynomiale nous donne
   $$\deg(P) = \deg(Q) + \deg(P'),\ \text{soit } n = \deg(Q) + n - 1.$$
   On a donc $\deg(Q) = 1$.
   b) On peut donc écrire $Q = aX + b$.
   Soit a_n le coefficient dominant de P_n. On a donc
   $$a_n = ana_n.$$
   a_n étant non nul, on a donc $a = \frac{1}{n}$.
   On a donc $Q = \frac{1}{n}(X - nb) = \frac{1}{n}(X-\alpha)$ en posant $\alpha = \frac{b}{n}$.

c) Pour $k = 0$, c'est évident. Supposons la propriété vraie pour k. Alors

$$\begin{aligned} P^{(k+1)} &= \left(\frac{1}{n-k}(X-\alpha)P^{(k+1)}\right)' \\ &= \frac{1}{n-k}P^{(k+1)} + \frac{1}{n-k}(X-\alpha)P^{(k+2)} \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{n-k-1}{n-k}P^{(k+1)} = \frac{1}{n-k}(X-\alpha)P^{(k+2)},$$

et on en déduit la propriété au rang $k+1$.

d) $X - \alpha$ est en facteur de toutes les dérivées, et donc $P^{(k)}(\alpha) = 0$. α est donc racine de multiplicité au moins n. P étant de degré n, par le théorème de d'Alembert-Gauss, toute racine est de multiplicité inférieure ou égale à n, et donc α est de multiplicité n.

e) α est donc l'unique racine, et donc P s'écrit $\lambda(X-\alpha)^n$.

4. On a vu que $0 \in \mathcal{E}$, et $\{\lambda(X-\alpha)^n \mid \lambda \in \mathbb{C}^*,\ \alpha \in \mathbb{C},\ n \geqslant 1\} \subseteq \mathcal{E}$.

   Réciproquement, si $P \in \mathcal{E}$, alors soit il est constant, et alors il est nul, soit il est non constant, et donc de la forme $\lambda(X-\alpha)^n$.

   Finalement,

$$\mathcal{E} = \{0\} \cup \{\lambda(X-\alpha)^n \mid \lambda \in \mathbb{C}^*,\ \alpha \in \mathbb{C},\ n \geqslant 1\}.$$

Exercice 9

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Montrer que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$L_i(a_i) = 1 \text{ et } L_i(a_j) = 0\ \forall j \neq i.$$

Réponse de l'exercice

Raisonnons par analyse-synthèse : soit L_i un tel polynôme. Alors nécessairement, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$L_i = \lambda \prod_{j \neq i}(X - a_j).$$

En notant que $L_i(a_i) = 1$, on a donc

$$\lambda = \frac{1}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

et donc

$$P = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Réciproquement, ce polynôme convient bien.