8 Polynômes

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera soit l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, soit l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$.

8.1 Généralités sur les polynômes

8.1.1 Définition d'un polynôme

Définition 8.1

On appelle *monôme* (d'indéterminée X) toute expression de la forme

$$aX^k,\ a \in \mathbb{K},\ k \in \mathbb{N}.$$

Si $k = 0$, on note plutôt $X^0 = 1$ et $aX^0 = a$.

On appelle alors *polynôme* (d'indéterminée X) toute somme finie de monôme.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes d'indéterminée X.

Exemple : $1, 2X, 3X + 4X^5 + X^{1000}$ sont des polynômes.

Proposition 8.2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors il existe un entier n et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Les a_k sont appelés *coefficients de P*.

L'usage veut qu'on écrive les polynômes dans l'ordre croissant ou décroissant des puissances des monômes.

Nota : Attention, toutes les puissances de monômes qui apparaissent dans un polynômes doivent être positives ; il n'existe pas de puissances de X négatives.

Définition 8.3

On appelle :

- *polynôme nul* le polynôme dont tous les coefficients sont nuls
- *polynôme unité* le polynôme 1

Définition 8.4

Deux polynômes sont égaux s'ils ont les mêmes coefficients. En particulier, un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

EXEMPLE : Ainsi, les polynômes aX^2+bX+c et dX^2+eX+f sont égaux si et seulement si $a=d$, $b=e$ et $c=f$.

Définition 8.5

On appelle *degré* d'un polynôme P la plus grande puissance de X apparaîssant dans P. On note $\deg(P)$ le degré de P, et par convention, $\deg(0)=-\infty$.

On appelle *coefficient dominant* de P le coefficient de $X^{\deg(P)}$.

On dit qu'un polynôme est *unitaire* si son coefficient dominant est 1.

On dit qu'un polynôme est *constant* si son degré est inférieur ou égal à 0.

On note alors $K_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

NOTA : Deux polynômes égaux ont le même degré, et deux polynômes n'ayant pas le même degré ne sont pas égaux.

Attention, si on écrit $P=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, cela ne signifie pas que $\deg(P)=n$. On sait seulement que $\deg(P)\leqslant n$, et que $\deg(P)=n \Leftrightarrow a_n\neq 0$.

8.1.2 Opérations sur les polynômes

Définition 8.6

Soient $P=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q=\sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k$ des polynômes, et $\lambda\in\mathbb{K}$. Alors :

- on appelle *somme* de P et Q le polynôme

$$P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k.$$

- on appelle *produit* de P par λ le polynôme

$$\lambda P = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k.$$

- on appelle *produit* de P et Q le polynôme

$$PQ = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k, \quad \text{où } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

EXEMPLE : Soient $P = 2X^2 + 1$ et $Q = 3X^3 - X^2 + 2X + 1$. Alors

- $P + Q = 3X^3 + X^2 + 2X = 2$
- $3P = 6X^2 + 3$
- $PQ = (2X^2 + 1)(3X^3 - X^2 + 2X + 1) = 6X^5 - 2X^4 + 7X^3 + X^2 + 2X + 1$

Proposition 8.7

Soient P, Q et R des polynômes. Alors

- $P \times 0 = 0$
- $PQ = 0 \Rightarrow P = 0$ ou $Q = 0$
- si $P \neq 0$, alors $PQ = PR \Rightarrow Q = R$.

Proposition 8.8

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

- $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$, avec égalité si $\deg P \neq \deg Q$.
- $\deg(\lambda P) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda = 0 \\ \deg(P) & \text{sinon} \end{cases}$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Proposition 8.9

Les égalités remarquables sont vraies sur $\mathbb{K}[X]$. Si $n \geqslant 1$:

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$

$$P^n - Q^n = (P-Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$$

Définition 8.10

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On appelle *composée de* P *et* Q le polynôme

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k,$$

où $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

NOTA : Attention, la composition n'est pas commutative.

EXEMPLE : La composée de X^2 et $X+1$ est $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$.

Proposition 8.11

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$.

Définition 8.12

On définit la *dérivée* d'un polynôme par

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right)' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k.$$

EXEMPLE : La dérivée de X^2 est $2X$, la dérivée de $3X^3 - 1$ est $9X^2$ et la dérivée de 1 est 0.

Proposition 8.13

La dérivation est linéaire, *i.e.*

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'.$$

On a aussi
$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ (PQ)' = P'Q + PQ'.$$

Proposition 8.14

Pour tout polynôme P de degré au moins 1, on a $\deg(P') = \deg(P) - 1$. Si $\deg(P) = 0$ ou $-\infty$, alors $\deg(P') = -\infty$.

Définition 8.15

On définit la *dérivée k-ième* d'un polynôme P par récurrence :

- $P^{(0)} = P$
- $P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$

EXEMPLE (À CONNAÎTRE) : Pour tous entiers $n \geqslant p$, on a
$$(X^n)^{(p)} = n(n-1)\cdots(n-p+1)X^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!}X^{n-p}.$$

Proposition 8.16

Si $k \leqslant \deg(P)$, alors
$$\deg(P^{(k)}) = \deg(P) - k.$$
Si $k > \deg(P)$, alors
$$P^{(k)} = 0.$$

Théorème 8.17 – Formule de Taylor

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors
$$P = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{(X-a)^k}{k!} P^{(k)}(a).$$

8.2 Fonctions polynomiales

Définition 8.18

Soit $P = \sum a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle *application polynomiale associée à P* l'application

$$\hat{P} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array} .$$

NOTA : En pratique, on a tendance à donner le même nom au polynôme P et à l'application polynomiale associée.

Il y a en fait une bijection entre les polynômes et les applications polynomiales.

Toutes les opérations sur les polynômes se transmettent de la même façon aux applications polynomiales :

- si $R = P + Q$, alors $\hat{R} = \hat{P} + \hat{Q}$
- si $R = P \circ Q$, alors $\hat{R} = \hat{P} \circ \hat{Q}$
- *etc.*

NOTA : On note qu'en particulier, on identifie les éléments de $\mathbb{K}$ avec les polynômes de degré $\leqslant 0$: $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[X]$. Sous cette identification, on a alors si $a \in \mathbb{K}$ (ou $a \in \mathbb{K}_0[X]$)

$$P(a) = P \circ a = \hat{P}(a).$$

Dorénavant, on notera X la fonction identité de $\mathbb{K}$, pour unifier les deux notions de polynôme et de fonction polynomiale.

8.3 Racines d'un polynôme

Définition 8.19

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une *racine* de P si

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P = (X - a)Q.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est une *racine de multiplicité k* de P si

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P = (X - a)^k Q \quad \text{et} \quad a \text{ n'est pas racine de } Q$$

EXEMPLE : On peut écrire $X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X^2 + 1)$, donc -1 est racine de ce polynôme.

Si on travaille sur $\mathbb{C}$, on peut continuer en

$$X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X - i)(X + i),$$

et donc i et $-i$ sont aussi racines.

On peut écrire $X^7 - 3X^6 + 5X^5 - 7X^4 + 7X^3 - 5X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3(X^2+1)^2$, donc 1 est racine de multiplicité 3.

Sur $\mathbb{C}$, on a donc $X^7 - 3X^6 + 5X^5 - 7X^4 + 7X^3 - 5X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3(X-i)^2(X+i)^2$, et donc i et $-i$ sont racines de multiplicité 2.

Théorème 8.20

$a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si $P(a) = 0$.

On utilise souvent le théorème précédent pour factoriser des expressions.

Théorème 8.21

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors a est racine de P de multiplicité k si et seulement si

$$\forall i \in [\![0, k-1]\!],\ P^{(i)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(a) \neq 0.$$

Démonstration. Supposons que a est racine de P de multiplicité k. Montrons le résultat par récurrence sur k :

- si $k = 1$, on peut donc écrire $P = (X-a)Q$, où a n'est pas racine de Q. On a alors bien $P'(a) = Q(a) \neq 0$.
- supposons le résultat vrai pour un k. Soit a de multiplicité $k+1$. Alors on peut écrire $P = (X-a)^{(k+1)}Q$ où a n'est pas racine de Q. Alors

$$P' = (k+1)(X-a)^k Q + (X-a)^{k+1}Q' = (X-a)^k R,$$

où a n'est pas racine de R. Par hypothèse de récurrence, on a donc $P'^{(i)}(a) = 0$ pour tout i entre 0 et $k-1$. En ajoutant que $P(a) = 0$, on a le résultat voulu.

Inversement, supposons que toutes les dérivées de P s'annulent en a jusqu'au rang k. La formule de Taylor de P en a s'écrit donc

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0}^{\deg P} \frac{(X-a)^i}{i!} P^{(i)}(a) \\ &= \sum_{i=k}^{\deg P} \frac{(X-a)^i}{i!} P^{(i)}(a) \\ &= (X-a)^k \sum_{i=0}^{\deg P} \frac{(X-a)^i}{i!} P^{(i+k)}(a) \\ &= (X-a)^k Q \end{aligned}$$

$P^{(k)}(a)$ étant non nul, a n'est pas racine de Q. □

Corollaire 8.22

Soit P un polynôme non nul. Soient $a_1, \dots, a_p$ les racines de P, de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Alors

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha p \leqslant \deg P.$$

Autrement dit, le nombre de racines, comptées avec multiplicité, d'un polynôme est inférieur à son degré.

Méthode

Montrer qu'un polynôme est nul
Pour montrer qu'un polynôme est nul, on peut au choix :

- montrer que tous ses coefficients sont nuls
- montrer qu'il admet une infinité de racines
- montrer qu'il admet plus de racines que son degré

EXEMPLE : La fonction sin n'est pas polynomiale. Sinon, soit P le polynôme associé. Alors tous les $k\pi$ sont racines de P, et donc admettant une infinité de racines, $P = 0$. D'où une contradiction.

EXERCICE : Déterminer tous les polynômes P tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = P(x)$.

8.3.1 Théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème 8.23 – de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme complexe non constant admet une racine.

NOTA : On dit que $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos*.

Corollaire 8.24

Tout polynôme complexe non nul admet autant de racines (comptées avec multiplicité) que son degré.

Corollaire 8.25

Tout polynôme P complexe se factorise en

$$P = \lambda \prod (X - a_i)^{\alpha_i},$$

où $\lambda \in C$, et les a_i sont racines de P de multiplicité α_i.

NOTA : Attention, ce résultat n'est vrai que pour les polynômes complexes. Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut ne pas avoir de racine ; par exemple, X^2+1 vu comme polynôme de $\mathbb{R}[X]$ n'admet pas de racines, mais il admet bien deux racines si on le voit comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

On a par contre le résultat suivant :

Proposition 8.26

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, et soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P. Alors $\bar{c}$ est une racine de P.

EXERCICE : Démontrer cette proposition.

En utilisant cette propriété, et en factorisant un polynôme réel sur $\mathbb{C}$, on peut en déduire en rassemblant les racines conjuguées une factorisation sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE : Soit $P = X^4 + 1$. Alors, sur $\mathbb{C}$, les racines de P sont $e^{i\pi/4}$, $e^{3i\pi/4}$, $e^{-3i\pi/4}$ et $e^{-i\pi/4}$. On a donc

$$\begin{aligned} P &= \left(X - e^{i\pi/4}\right)\left(X - e^{-i\pi/4}\right)\left(X - e^{3i\pi/4}\right)\left(X - e^{-i\pi/4}\right) \\ &= (X^2 - 2\cos(\pi/4) + 1)(X^2 - 2\cos(3\pi/4) + 1) \\ &= (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \end{aligned}$$

8.3.2 Relations coefficients-racines

Nous travaillons dans cette section avec des polynômes complexes (ou des polynômes réels pouvant s'écrire comme produit de polynômes de degré 1).

Si P est de degré 2, on peut écrire, si r_1 et r_2 sont les racines de P :

$$P = aX^2 + bX + c = a(X - r_1)(X - r_2) = aX^2 - a(r_1 + r_2)X + ar_1r_2.$$

En identifiant les coefficients, on a donc

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= -\frac{b}{a} \\ r_1 r_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Faisons la même chose si P est de degré 3 :

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - r_1)(X - r_2)(X - r_3).$$

En développant et en identifiant, on a donc

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= -\frac{b}{a} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 &= \frac{c}{a} \\ r_1 r_2 r_3 &= -\frac{d}{a} \end{aligned}$$

De façon générale, on peut énoncer :

Proposition 8.27

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme complexe de degré n, et soient $r_1, \ldots, r_n$ (comptées éventuellement plusieurs fois). Alors

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} r_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

8.4 Exercices

Exercice 1

Factoriser les polynômes suivants :

a) $X^4 - X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

b) $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

c) $X^6 + X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$

d) $X^6 - 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 3X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$, sachant que i est racine complexe

Réponse de l'exercice

1. $P = \left(X - e^{\frac{i\pi}{6}}\right)\left(X - e^{\frac{-i\pi}{6}}\right)\left(X + e^{\frac{i\pi}{6}}\right)\left(X + e^{-\frac{i\pi}{6}}\right)$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $P = (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. $P = (X-1)^2(X-i)(X+i)$ sur $\mathbb{C}[X]$ et $P = (X-1)^2(X^2+1)$ sur $\mathbb{R}[X]$.
3. $P = (X^3 - e^{2i\pi/3})(X^3 - e^{-2i\pi/3})$ $= \left(X - e^{2i\pi/9}\right)\left(X - e^{-2i\pi/9}\right)\left(X - e^{4i\pi/9}\right)\left(X - e^{-4i\pi/9}\right)\left(X - e^{8i\pi/9}\right)\left(X - e^{-8i\pi/9}\right)$.
4. i racine simple, donc $-i$ aussi. 1 est racine double évidente, et on trouve 2 et -1 pour les deux dernières racines.

Exercice 2

Montrer qu'un polynôme complexe non constant est surjectif.

Réponse de l'exercice

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $P - z$ admet une racine (théorème de d'Alembert-Gauss), et donc il existe $u \in \mathbb{C}$ tel que $(P-z)(u) = P(u) - z = 0$.

Exercice 3

Montrer qu'un polynôme complexe P tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \in \mathbb{R}$ est en fait à coefficients réels.

Réponse de l'exercice

Si $P = \sum a_k X^K$, appelons $\overline{P} = \sum \overline{a_k} X^k$.

On vérifie simplement que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z}).$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(x) &= \overline{P(x)} \\ &= \overline{P}(\overline{x}) \\ &= \overline{P}(x) \end{aligned}$$

Tout réel est donc racine de $P - \overline{P}$, et donc $P = \overline{P}$, autrement dit P est à coefficients réels.

Exercice 4

On cherche les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que

$$P = P(1-X).$$

1. Montrer que $X^2 - X + \lambda$ est solution du problème pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. Montrer que si P et Q sont solutions, alors PQ aussi.
3. Soit P solution du problème, unitaire. Montrer que P peut s'écrire

$$P = \left(X - \frac{1}{2}\right)^k \prod_{i=1}^{p} (X^2 - X + \lambda_i),$$

avec $k, p \in \mathbb{N}$ et pour tout i, $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

4. Montrer que k est pair.
5. Conclure.

Réponse de l'exercice

1. Il suffit de calculer :

$$(1-X)^2 - (1-X) + \lambda = X^2 - 2X + 1 - 1 + X + \lambda = X^2 - X + \lambda.$$

2. C'est évident.
3. On note que pour toute racine a de P différente de $\frac{1}{2}$, alors $1-a$ est aussi racine. En regroupant toutes ces racines deux par deux, on a donc

$$P = \left(X - \frac{1}{2}\right)^k \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)(X - 1 + a_i),$$

et on retrouve le résultat demandé.

4. On peut alors écrire

$$P(1-X) = \left(\frac{1}{2} - X\right)^k \prod_{i=1}^{p} (X^2 - X + \lambda_i).$$

Mais alors nécessairement $(-1)^k = 1$, et donc k est pair.

5. Finalement, $(X - \frac{1}{2})^2$ s'écrivant sous la forme $X^2 - X + \lambda$, les solutions sont exactement les produits de tels polynômes.

Exercice 5

Soit $P \neq X$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P \circ P - X = (P - X)Q.$$

Réponse de l'exercice

Écrivons $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. On a alors

$$\begin{aligned}
P \circ P - X &= P \circ P - P + P - X \\
&= \sum_{k=0}^{d} a_k (P^k - X^k) + P - X \\
&= \left(\sum_{k=0}^{d} a_k (P - X) \sum_{i=0}^{k-1} P^i X^{k-1-i} \right) + P - X \\
&= (P - X) Q
\end{aligned}$$

où $Q = 1 + \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{i=0}^{k-1} P^i X^{k-1-i}$.

Exercice 6

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$(X+1)^n - X^n - 1 = (X^2 + X + 1)Q.$$

Réponse de l'exercice

Un tel que existe si et seulement si j et $\bar{j}$ sont racines de $(X+1)^n - X^n - 1$, où $j = e^{i\frac{\pi}{3}}$, si et seulement si j en est racine (car le polynôme est à coefficients réels).

On note que $j + 1 = -j^2$.

Calculons alors

$$S = (j+1)^n - j^n - 1 = (-1)^n j^{2n} - j^n - 1.$$

On regarde alors modulo 6 :

- Si $n = 6p$, alors $S = -3$
- Si $n = 6p + 1$, alors $S = 0$
- Si $n = 6p + 2$, alors $S = 2j$
- Si $n = 6p + 3$, alors $S = -3$
- Si $n = 6p + 4$, alors $S = 2j^2$
- Si $n = 6p + 5$, alors $S = 0$

Finalement, il faut et il suffit que n soit un multiple de 6 plus 1 ou 5.

Exercice 7

Soit $P = X^3 + X + 1$. On note α, β et γ ses racines complexes.

1. Calculer $\alpha + \beta + \gamma$ et $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.
2. Calculer $P(\alpha) + P(\beta) + P(\gamma)$ de deux façons différentes pour calculer $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.
3. En notant que $X^4 = X \times (X^3 + X + 1) - X^2 - X$, calculer $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$.

Réponse de l'exercice

1. Par les relations coefficients racines, on a donc $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Ensuite, peut calculer
$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma).$$
On a donc
$$0 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2,$$
et donc $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2$.
2. D'un côté, on a clairement $P(\alpha) + P(\beta) + P(\gamma) = 0$, et d'un autre côté,
$$P(\alpha) + P(\beta) + P(\gamma) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \alpha + \beta + \gamma + 3,$$
et on en tire $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3$.
3. On a donc, en notant que $\alpha^4 = \alpha P(\alpha) - \alpha^2 - \alpha = -\alpha^2 - \alpha$:
$$\begin{aligned}\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 &= -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha + \beta + \gamma)\\ &= -(-2) - 0\\ &= 2\end{aligned}$$

Exercice 8

Résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + z = 2\\ xyz = -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\end{cases}$$

Réponse de l'exercice

Soit (x, y, z) une solution. En multipliant la dernière ligne par xyz, on a donc
$$xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{xyz}{2} = -\frac{1}{4},$$
et donc
$$xy + xz + yz = -\frac{1}{4}.$$
On reconnait alors les relations coefficients-racines : on cherche les racines de
$$X^3 - 2X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{2}.$$
2 en est racine évidente, et les deux autres racines sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Réciproquement, tous les triplets possibles sont bien solution.

Exercice 9

Soit $P = X^3 - aX^2 + bX - c$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que ses racines complexes soient en progression arithmétique (*i.e.* les trois premiers termes d'une suite arithmétique).

Réponse de l'exercice

Notons $\alpha - r,\ \alpha$ et $\alpha + r$ les trois racines de P. Alors

$$\begin{aligned} P &= (X-\alpha+r)(X-\alpha)(X-\alpha-r) \\ &= X^3 - 3\alpha X^2 + (3\alpha^2 - r^2)X + \alpha(r^2-\alpha^2) \end{aligned}$$

et donc

$$\alpha = \frac{a}{3},\ r^2 = \frac{a^2}{3} - b \quad \text{et} \quad c = \frac{a}{3}\left(b - \frac{2}{9}a\right).$$

On a donc

$$P = X^3 - aX^2 + bX - \frac{a}{3}\left(b - \frac{2}{9}a\right).$$

Réciproquement, tous ces polynômes conviennent : on vérifie que $\frac{a}{3}$ est racine évidente, et les autres sont en progression arithmétique.

Exercice 10

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Montrer que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$L_i(a_i) = 1 \text{ et } L_i(a_j) = 0\ \forall j \neq i.$$

Réponse de l'exercice

Raisonnons par analyse-synthèse : soit L_i un tel polynôme. Alors nécessairement, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$L_i = \lambda \prod_{j \neq i} (X - a_j).$$

En notant que $L_i(a_i) = 1$, on a donc

$$\lambda = \frac{1}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$$

et donc

$$P = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Réciproquement, ce polynôme convient bien.