

Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, nous allons étendre les définitions vues dans le chapitre étudiant les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$.

$\mathbb{K}$ désignera toujours l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

9.1 Définitions, vade-meducm

Dans cette section, on rappelle les définitions générales sur les espaces vectoriels (qui restent les mêmes que dans le cas $\mathbb{K}^n$).

Définition 9.1

Soit E un ensemble.

On appelle *loi de composition interne* toute fonction $+$: $E \times E \rightarrow E$.

On dit que cette loi :

- admet un élément neutre si
- est commutative si
- est associative si
- est symétrisable si

Un ensemble avec une loi vérifiant ces propriétés est appelé

Définition 9.2

Soit E un groupe abélien avec son opération $+$ et son neutre 0 . On suppose qu'il existe une opération $\cdot$: $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$ telle que

-
-

-
-

On dit alors que E muni de $+$ et de $\cdot$ est un

Les éléments de E sont appelés , et ceux de $\mathbb{K}$.

Définition 9.3

On appelle *combinaison linéaire* de E toute somme finie de la forme

où les $\lambda_k \in \mathbb{K}$ et $x_k \in E$.

Proposition 9.4

Un espace vectoriel est stable par combinaison linéaire :

Proposition 9.5

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$. Alors

-
-

Définition 9.6

Soit $F \subseteq E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est un espace vectoriel (pour les mêmes lois).

Proposition 9.7

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

-
-

-

Proposition 9.8

Toute intersection (finie ou non) de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 9.9

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels, alors $F + G =$ est un sous-espace vectoriel.

Proposition-Définition 9.10

Soient $u_1, \dots, u_k \in E$. On appelle *sous-espace vectoriel engendré par* $u_1, \dots, u_k$ le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, \dots, u_k$.

Il est noté $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ et est donné par

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) =$$

Définition 9.11

Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une famille de vecteurs de E . On dit que la famille est :

-
-

Définition 9.12

On dit qu'une famille infinie de vecteurs de E est libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre.

Théorème 9.13

Une famille $\{u_1, \dots, u_n\}$ est libre si et seulement si

Proposition 9.14

Une famille de un vecteur est libre si et seulement si

Une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si

Proposition 9.15

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E . Alors

Définition 9.16

Soit $\{u_1, \dots, u_p\}$ une famille de vecteurs de E . Soit F sous-espace vectoriel de E .

On dit que cette famille est génératrice de F si

Proposition 9.17

Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors

Définition 9.18

Soit F un sous-espace vectoriel de E , et soit $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_p\}$ une famille de vecteurs de F .

On dit que $\mathcal{B}$ est une *base* de F si

Proposition-Définition 9.19

Une famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$ est une base de F si et seulement si

Dans ce cas, si

$$u = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k,$$

alors les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés

Théorème 9.20

Pour tout sous-espace vectoriel F de E , si F admet une base, alors

9.2 Exemples classiques d'espaces vectoriels

On va plutôt axer ce chapitre sur les différents espaces vectoriels à connaître. On a déjà traité le cas $\mathbb{K}^n$, et on va donc regarder les espaces vectoriels suivants : $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{R}^I$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

9.2.1 L'espace des polynômes

Proposition 9.21

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition et du produit par un scalaire usuels, est un espace vectoriel.

On ne donne pas la preuve formelle, mais on se convainc que toutes les propriétés voulues sont bien vérifiées.

Proposition-Définition 9.22

La famille $\{1, X, X^2, \dots\}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée

Démonstration. Il est clair que cette famille est génératrice : tout polynôme s'écrit comme combinaison linéaire finie de monômes.

Montrons alors qu'elle est libre.

□

On peut même énoncer de façon plus générale :

Proposition 9.23

Soit $\{P_k \mid k \in I\}$ où $I \subseteq \mathbb{N}$ une famille échelonnée de polynômes,

On peut donner des exemples classiques de sous-espaces vectoriels :

Proposition 9.24

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Sa base canonique est

Démonstration. Cet ensemble est bien non-vidé, et stable par combinaison linéaire.

De plus, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est bien libre car échelonnée, et génératrice par définition de polynôme. $\square$

9.2.2 L'espace des fonctions

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Proposition 9.25

L'ensemble $\mathbb{R}^I$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, muni de son addition et du produit par un scalaire usuel, est un espace vectoriel.

NOTA : En fait, pour tous ensembles E et F , où F est un espace vectoriel, l'ensemble F^E est un espace vectoriel.

Proposition 9.26

Soit k un entier naturel. Alors

En particulier, on retrouve par exemple le théorème vu pour les équations différentielles :

Proposition 9.27

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est

9.2.3 L'espace des matrices

Proposition 9.28

Pour tous entiers n et p , l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

On note qu'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est simplement la donnée de np coefficients, et on peut donc facilement donner une base :

Proposition 9.29

Pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on note $E_{i,j}$

Alors la famille est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée

On peut donner quelques exemples classiques de sous-espaces vectoriels :

9.2.4 L'ensemble des suites

Proposition 9.30

L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles ou complexes est un espace vectoriel.

On retrouve alors le théorème déjà vu sur les suites :

Proposition 9.31

Soit la relation de récurrence linéaire donnée par

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Alors

On peut alors citer quelques sous-espaces vectoriels :

9.3 Dimension

Définition 9.32

Un espace vectoriel E est dit de *dimension finie*

Dans le cas contraire, on dit qu'il est

On a alors, comme dans le cas de $\mathbb{K}^n$, les théorèmes suivants :

Théorème 9.33 – de la base extraite

Si E est dimension finie,

NOTA : Cet algorithme est basé sur la relation suivante :

$$\forall e_1, \dots, e_{n+1} \in E, e_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \Rightarrow \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

Méthode

On rappelle l'algorithme d'extraction de base, en partant d'une famille génératrice finie :

- si la famille est libre, alors c'est une base
- sinon, un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres ; on l'enlève de la famille, qui reste génératrice de E
- on réitère tant que la famille n'est pas libre.

La famille vide étant libre, l'algorithme s'arrêtera nécessairement.

Théorème 9.34 – de la base incomplète

Toute famille libre

Méthode

On donne l'algorithme dans le cas d'un espace de dimension finie, en partant d'une famille libre :

- si la famille est génératrice, c'est une base
- sinon, on cherche un vecteur de E qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de la famille, qu'on ajoute à la famille
- on réitère tant que la famille n'est pas génératrice.

Finalement, un espace est de dimension finie si et seulement s'il admet une base finie. On admet alors que dans ce cas, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs.

Définition 9.35

Si E est de dimension finie, on appelle *dimension de E* , notée $\dim E$,

EXEMPLES (FONDAMENTAUX) : D'après ce qu'on a vu :

- les espaces $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ sont de dimensions finies, et
- les espaces $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{R}^I$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont de dimension infinie.

Dans la suite de cette partie, E désigne un espace vectoriel de dimension finie p .

Proposition 9.36

Tout sous-espace vectoriel de E est

De plus, un sous-espace vectoriel de E est égal à E si et seulement si

Définition 9.37

On appelle

On peut alors trouver par exemple la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels :

Proposition 9.38

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E , de dimension finie. Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

En dimension finie, de façon analogue aux ensembles finis, certaines propriétés sur les familles de vecteurs sont simplifiées.

Proposition 9.39

Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E . Alors :

- si $\mathcal{F}$ est libre, alors
- si $\mathcal{F}$ est génératrice de E , alors
- si $\mathcal{F}$ est libre et $n = p$, alors
- si $\mathcal{F}$ est génératrice de E et $n = p$, alors

Dans le cas où la famille a le même nombre d'élément que la dimension de l'espace considéré, on a donc :

Proposition 9.40

Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs de E . Alors sont équivalentes

- (i)
- (ii)
- (iii)

Méthode

Très souvent, en dimension finie, pour montrer qu'une famille F est une base de E , on peut :

-
-

9.4 Exercices

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. L'ensemble des fonctions croissantes.
2. L'ensemble des fonctions monotones.
3. L'ensemble des fonctions d'intégrale nulle sur $[0, 1]$.
4. L'ensemble des fonctions qui s'annulent en 0.
5. L'ensemble des fonctions qui s'annulent.
6. L'ensemble des fonctions paires.
7. L'ensemble des polynômes de degré 2.
8. L'ensemble des polynômes ayant autant de racines réelles distinctes que leur degré.
9. L'ensemble des suites arithmétiques.
10. L'ensemble des matrices de trace nulle.
11. L'ensemble des matrices inversibles.

Exercice 2

On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère les ensembles

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et en donner une base.
2. Montrer que la réunion des bases de F et G est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Dans l'espace vectoriels des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\sin, \cos)$
2. $(x \mapsto \sin(2x), \sin, \cos)$
3. $(x \mapsto e^{-kx} \mid k \in \mathbb{N})$

Exercice 4

Soit K la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid MK = KM = M\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que les matrices de E ne sont pas inversibles.
3. Donner une base de E .
4. Soit

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

Exercice 5 Interpolation de Lagrange

On fixe des points $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de trouver un polynôme tel que $f(x_i) = a_i$ pour tout i .

1. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique polynôme L_i de degré n tel que

$$L_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \neq i, L_i(x_j) = 0.$$

2. Montrer que la famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une famille libre de polynômes.
3. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Montrer alors qu'il existe un unique polynôme de degré n tel que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_i) = a_i.$$

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_n = \{X^k(X-1)^{n-k} \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Indication : On pourra procéder par récurrence sur n .

Exercice 7

On travaille dans l'espace vectoriel $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Pour tout n , on note

$$E_n = \left\{ f \in V \mid \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} = 0 \right\}.$$

1. Montrer que pour tout n , E_n est un sous-espace vectoriel de V .
2. Soit $f \in V$; on pose $g = f \times \exp$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g^{(n)} = \exp \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}.$$

b) En déduire que $f \in E_n$ si et seulement si $g^{(n)} = 0$.

c) On note pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$.

Montrer que la famille $(f_0, \dots, f_{n-1})$ est une base de E_n .

3. a) Montrer que la suite (E_n) est croissante pour l'inclusion, i.e. pour tout $n : E_n \subseteq E_{n+1}$.
- b) Montrer que $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ est un sous-espace vectoriel de V .
- c) Montrer que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de E . E est-il de dimension finie?

