9 Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, nous allons étendre les définitions vues dans le chapitre étudiant les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$.

$\mathbb{K}$ désignera toujours l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

9.1 Définitions, vade-meducm

Dans cette section, on rappelle les définitions générales sur les espaces vectoriels (qui restent les mêmes que dans le cas $\mathbb{K}^n$).

Définition 9.1

Soit E un ensemble.

On appelle *loi de composition interne* toute fonction $+ : E \times E \to E$.

On dit que cette loi :

- admet un élément neutre si $\exists e \in E,\ \forall x \in E,\ e + x = x + e = x$ (on note ce e : 0)
- est commutative si $\forall x, y \in E,\ x + y = y + x$
- est associative si $\forall x, y, z \in E,\ x + (y + z) = (x + y) + z$
- est symétrisable si $\forall x \in E,\ \exists y \in E, x + y = y + x = 0$ (on note ce y : $-x$)

Un ensemble avec une loi vérifiant ces propriétés est appelé *groupe abélien*.

Définition 9.2

Soit E un groupe abélien avec son opération $+$ et son neutre 0. On suppose qu'il existe une opération $\cdot\ : \mathbb{K} \times E \to E$ telle que

- $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E,\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot y$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$

On dit alors que E muni de $+$ et de $\cdot$ est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel*.

Les éléments de E sont appelés *vecteurs* , et ceux de $\mathbb{K}$ *scalaires* .

Définition 9.3

On appelle *combinaison linéaire* de E toute somme finie de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

où les $\lambda_k \in \mathbb{K}$ et $x_k \in E$.

Proposition 9.4

Un espace vectoriel est stable par combinaison linéaire :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in E,\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in E.$$

Proposition 9.5

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$. Alors

- $\lambda x = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $x = 0$
- le symétrique de x vérifie $-x = (-1) \cdot x$.

Définition 9.6

Soit $F \subseteq E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est un espace vectoriel (pour les mêmes lois).

Proposition 9.7

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- $F \subseteq E$
- F est non vide

- F est stable par addition et multiplication par un scalaire, *i.e.*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in F,\ x + \lambda y \in F.$$

Proposition 9.8

Toute intersection (finie ou non) de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 9.9

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels, alors $F + G = \{u + v \mid u \in F,\ v \in G\}$ est un sous-espace vectoriel.

Proposition-Définition 9.10

Soient $u_1, \dots, u_k \in E$. On appelle *sous-espace vectoriel engendré par* $u_1, \dots, u_k$ le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, \dots, u_k$.

Il est noté $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ et est donné par

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \;\middle|\; \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K} \right\}.$$

Définition 9.11

Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille est :

- *liée* s'il existe un $i \in [\![1, n]\!]$ tel que u_i soit combinaison linéaire des u_j, $j \neq i$;
- *libre* si elle n'est pas liée ; on dit aussi que les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont *linéairement indépendants*.

Définition 9.12

On dit qu'une famille infinie de vecteurs de E est libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre.

Théorème 9.13

Une famille $\{u_1, \ldots, u_m\}$ est libre si et seulement si

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 0.$$

Proposition 9.14

Une famille de un vecteur est libre si et seulement si ce vecteur n'est pas nul.

Une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Proposition 9.15

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille libre de E. Alors toute sous-famille de $\mathcal{F}$ est libre.

Définition 9.16

Soit $\{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille de vecteurs de E. Soit F sous-espace vectoriel de E.

On dit que cette famille est génératrice de F si $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p) = F$.

Proposition 9.17

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors en ajoutant n'importe quel vecteur de F à une famille génératrice de F, la famille reste génératrice.

Définition 9.18

Soit F un sous-espace vectoriel de E, et soit $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille de vecteurs de F.

On dit que $\mathcal{B}$ est une *base* de F si elle est libre et génératrice.

Proposition-Définition 9.19

Une famille $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_p)$ est une base de F si et seulement si tout vecteur de F s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}$.

Dans ce cas, si

$$u = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k,$$

alors les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont appelés *coordonnées de u dans $\mathcal{B}$*.

Théorème 9.20

Pour tout sous-espace vectoriel F de E, si F admet une base, alors toutes les bases de F ont le même cardinal.

9.2 Exemples classiques d'espaces vectoriels

On va plutôt axer ce chapitre sur les différents espaces vectoriels à connaître. On a déjà traité le cas $\mathbb{K}^n$, et on va donc regarder les espaces vectoriels suivants : $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{R}^I$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

9.2.1 L'espace des polynômes

Proposition 9.21

L'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni de son addition et du produit par un scalaire usuels, est un espace vectoriel.

On ne donne pas la preuve formelle, mais on se convainc que toutes les propriétés voulues sont bien vérifiées.

Proposition-Définition 9.22

La famille $(1, X, X^2, \ldots)$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée *base canonique*.

Démonstration. Il est clair que cette famille est génératrice : tout polynôme s'écrit comme combinaison linéaire finie de monômes.

Montrons alors qu'elle est libre. Soit donc la sous-famille $\{X^{i_1}, \ldots, X^{i_p}\}$, les i_k étant distincts deux à deux. Soient alors $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des scalaires tels que

$$\lambda_1 X^{i_1} + \cdots + \lambda_p X^{i_p} = 0.$$

Alors par définition de nullité d'un polynôme, tous les coefficients sont nuls, et la famille est donc bien libre. $\square$

On peut même énoncer de façon plus générale :

Proposition 9.23

Soit $\{P_k \mid k \in I\}$ où $I \subseteq \mathbb{N}$ une famille échelonnée de polynômes, *i.e.* telle que tous les P_k aient des degrés distincts. Alors cette famille est libre.

On peut donner des exemples classiques de sous-espaces vectoriels :

Proposition 9.24

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Sa base canonique est $(1, X, \cdots, X^n)$.

Démonstration. Cet ensemble est bien non-vide, et stable par combinaison linéaire.

De plus, la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est bien libre car échelonnée, et génératrice par définition de polynôme. $\square$

9.2.2 L'espace des fonctions

Dans cette partie, I designe un intervalle de $\mathbb{R}$.

Proposition 9.25

L'ensemble $\mathbb{R}^I$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, muni de son addition et du produit par un scalaire usuel, est un espace vectoriel.

NOTA : En fait, pour tous ensembles E et F, où F est un espace vectoriel, l'ensemble F^E est un espace vectoriel.

Proposition 9.26

Soit k un entier naturel. Alors l'ensemble des fonctions dérivable k fois, et l'ensemble $\mathcal{C}^k$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^I$.

En particulier, on retrouve par exemple le théorème vu pour les équations différentielles :

Proposition 9.27

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est un espace vectoriel.

9.2.3 L'espace des matrices

Proposition 9.28

Pour tous n et p, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

On note qu'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est simplement la donnée de np coefficients, et on peut donc facilement donner une base :

Proposition 9.29

Pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i-ieme ligne et de la j-ième colonne qui vaut 1.

Alors la famille $\left(E_{i,j}\right)_{i,j}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appellée *base canonique*.

NOTA : Les ensembles de matrices étant des espaces vectoriels, on pourra alors considérer des applications linéaires entre ces espaces ; applications qu'on pourra écrire sous forme de matrices.

On peut donner quelques exemples classiques de sous-espaces vectoriels : l'ensemble des matrices diagonales, triangulaires, de trace nulle, *etc.*

9.2.4 L'ensemble des suites

Proposition 9.30

L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles ou complexes est un espace vectoriel.

On retrouve alors le théorème déjà vu sur les suites :

Proposition 9.31

Soit la relation de récurrence linéaire donnée par

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Alors l'ensemble des suites solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On peut alors citer quelques sous-espaces vectoriels : l'ensemble des suites convergentes, l'ensemble des suites stationnaires, *etc.*

9.3 Dimension

Définition 9.32

Un espace vectoriel E est dit de *dimension finie* s'il possède une famille génératrice finie.

Dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie.

On a alors, comme dans le cas de $\mathbb{K}^n$, les théorèmes suivants :

Théorème 9.33 – de la base extraite

Si E est dimension finie, de toute famille génératrice finie on peut extraire une famille libre.

NOTA : Cet algorithme est basé sur la relation suivante :

$$\forall e_1, \ldots, e_{n+1} \in E,\ e_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_n) \Rightarrow \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{n+1}) = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_n).$$

Méthode

On rappelle l'algorithme d'extraction de base, en partant d'une famille génératrice finie :

- si la famille est libre, alors c'est une base
- sinon, un des vecteurs (par exemple e_n) s'écrit comme combinaison linéaire des autres ; on l'enlève de la famille, qui reste génératrice de E
- on réitère tant que la famille n'est pas libre.

La famille vide étant libre, l'algorithme s'arrêtera nécessairement.

Théorème 9.34 – de la base incomplète

Toute famille libre peut être complétée en une base de l'espace.

Méthode

On donne l'algorithme dans le cas d'un espace de dimension finie, en partant d'une famille libre :

- si la famille est génératrice, c'est une base
- sinon, on cherche un vecteur de E qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de la famille, qu'on ajoute à la famille
- on réitère tant que la famille n'est pas génératrice.

Finalement, un espace est de dimension finie si et seulement s'il admet une base finie. On admet alors que dans ce cas, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs.

Définition 9.35

Si E est de dimension finie, on appelle *dimension de* E, notée $\dim E$, le cardinal commun de toutes les bases de E.

EXEMPLES (FONDAMENTAUX) : D'après ce qu'on a vu :

- les espaces $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ sont de dimensions finies, et
$$\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1,\ \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np \quad \text{et} \quad \dim \mathbb{K}^n = n.$$
- les espaces $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{R}^I$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont de dimension infinie.

Dans la suite de cette partie, E désigne un espace vectoriel de dimension finie p.

Proposition 9.36

Tout sous-espace vectoriel de E est de dimension finie, de dimension inférieure ou égale à p.

De plus, un sous-espace vectoriel de E est égal à E si et seulement si sa dimension est p.

Définition 9.37

On appelle *droite vectorielle* tout sous-espace vectoriel de dimension 1, *plan vectoriel* tout sous-espace de dimension 2 et *hyperplan* tout sous-espace de dimension $p-1$.

On peut alors trouver par exemple la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels :

Proposition 9.38

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, de dimension finie. Alors
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

En dimension finie, de façon analogue aux ensembles finis, certains propriétés sur les familles de vecteurs sont simplifiées.

Proposition 9.39

Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors :

- si F est libre, alors $n \leqslant p$
- si F est génératrice de E, alors $n \geqslant p$
- si F est libre et $n = p$, alors F est une base de E
- si F est génératrice de E et $n = p$, alors F est une base de E.

Dans le cas où la famille a le même nombre d'élément que la dimension de l'espace considéré, on a donc :

Proposition 9.40

Soif $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs de E. Alors sont équivalentes

(i) $\mathcal{F}$ est libre

(ii) $\mathcal{F}$ est génératrice

(iii) $\mathcal{F}$ est une base.

Méthode

Très souvent, en dimension finie, pour montrer qu'une famille F est une base de E, on peut :

- montrer que F contient $\dim E$ vecteurs
- montrer que F est libre.

9.4 Exercices

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. L'ensemble des fonctions croissantes.
2. L'ensemble des fonctions monotones.
3. L'ensemble des fonctions d'intégrale nulle sur $[0,1]$.
4. L'ensemble des fonctions qui s'annulent en 0.
5. L'ensemble des fonctions qui s'annulent.
6. L'ensemble des fonctions paires.
7. L'ensemble des polynômes de degré 2.
8. L'ensemble des polynômes ayant autant de racines réelles distinctes que leur degré.
9. L'ensemble des suites arithmétiques.
10. L'ensemble des matrices de trace nulle.
11. L'ensemble des matrices inversibles.

Réponse de l'exercice

1. Non
2. Non (id et id^3)
3. Oui
4. Oui
5. Non
6. Oui
7. Non
8. Non
9. Oui
10. Oui
11. Non

Exercice 2

On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère les ensembles

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et en donner une base.
2. Montrer que la réunion des bases de F et G est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Dans l'espace vectoriels des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\sin, \cos)$
2. $(x \mapsto \sin(2x), \sin, \cos)$
3. $\left(x \mapsto e^{-kx} \mid k \in \mathbb{N}\right)$

Réponse de l'exercice

1. Oui
2. Oui
3. Oui

Exercice 4

Soit K la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid MK = KM = M\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer par l'absurde que les matrices de E ne sont pas inversibles.
3. Donner une base de E.
4. Soit
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

Exercice 5 Interpolation de Lagrange

On fixe des points $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de trouver un polynôme tel que $f(x_i) = a_i$ pour tout i.

1. Montrer que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme L_i de degré n tel que
$$L_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \neq i,\ L_i(x_j) = 0.$$
2. Montrer que la famille $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre de polynômes.
3. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Montrer alors qu'il existe un unique polynôme de degré n tel que

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ P(x_i) = a_i.$$

Réponse de l'exercice

1. On a déjà n racines données pour L_i, il existe donc $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que

$$L_i = \lambda_i \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} (X - x_k).$$

En évaluant en x_i, on obtient

$$\lambda_i = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} (x_i - x_k)},$$

et on trouve alors

$$L_i = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

2. Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i L_i = 0$. Alors en évaluant en x_k, on obtient

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(x_k) = \alpha_k = 0.$$

La famille est donc libre.

3. La famille est libre, et contient $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ vecteurs, et donc en est une base.

4. Considérons le polynôme $\sum a_i L_i$. Alors ce polynôme vérifie la condition. Soit alors deux polynômes P et Q qui conviennent. On peut alors tous les deux les décomposer sur la base des (L_i) pour avoir

$$P = \sum \alpha_i L_i \quad \text{et} \quad Q = \sum \beta_i L_i.$$

Mais alors

$$P(x_i) = \alpha_i = a_i = Q(x_i) = \beta_i.$$

Les deux polynômes sont bien égaux.

Exercice 6

On travaille dans l'espace vectoriel $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Pour tout n, on note

$$E_n = \left\{ f \in V \,\middle|\, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0 \right\}.$$

1. Montrer que pour tout n, E_n est un sous-espace vectoriel de V.

2. Soit $f \in V$; on pose $g = f \times \exp$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g^{(n)} = \exp \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.$$

b) En déduire que $f \in E_n$ si et seulement si $g^{(n)} = 0$.

c) On note pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $f_k \colon x \mapsto x^k e^{-x}$.
Montrer que la famille $(f_0, \dots, f_{n-1})$ est une base de E_n.

3. a) Montrer que la suite (E_n) est croissante pour l'inclusion, *i.e.* pour tout n : $E_n \subseteq E_{n+1}$.

b) Montrer que $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ est un sous-espace vectoriel de V.

c) Montrer que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de E. E est-il de dimension finie ?

Réponse de l'exercice

1. Il est clair que $E_n \subseteq V$ et que $0 \in E_n$. De plus, par linéarité de la somme (finie) et de la dérivation, E_n est stable par combinaisons linéaires.
Finalement, E_n est bien un sous-espace vectoriel de V.

2. a) On le montre par récurrence sur n : le cas $n = 0$ est évident.
On suppose donc l'égalité vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et on a alors

$$\begin{aligned} g^{(n+1)} &= \left(\exp \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \right)' \\ &= \exp \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} + \exp \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} \\ &= \exp \times \left(f + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} + f^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \right) \\ &= \exp \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \end{aligned}$$

Finalement, par récurrence, on a bien le résultat voulu.

b) Par la question précédente, c'est évident par stricte positivité de l'exponentielle.

c) On commence par noter que $\exp f_k = X^k$, et donc sa dérivée n-ième est nulle ; les f_k sont bien dans E_n.
Soient alors $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ des scalaires tels que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k f_k = 0$.
On a alors $\frac{1}{\exp} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda X^k = 0$ et par définition de nullité d'un polynôme, tous les λ_k sont nuls.
La famille est donc bien libre.
Soit maintenant $f \in E_n$. Alors la dérivée n-ième de $g = \exp \times f$ est nulle, et donc g est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$:

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k.$$

Ainsi, on a

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k \frac{1}{\exp},$$

et donc la famille proposée est bien génératrice.

Finalement, c'est bien une base de E.

3. a) Soit $f \in E_n$. On a alors $(f \times \exp)^{(n)} = 0$ et donc $(f \times \exp)^{(n+1)} = 0$ et donc $f \in E_{n+1}$.

   b) E est clairement non vide et inclus dans V. Soient alors $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: il existe alors un n tel que $f, g \in E_n$.

   Mais alors $f + \lambda g \in E_n$, et donc $f + \lambda g \in E$.

   Finalement, E est bien un sous-espace vectoriel de V.

   c) On a déjà que toute sous-famille finie est libre.

   De plus, si $f \in E$, alors il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f \in E_n$; alors f s'écrit comme combinaison linéaire des f_k.

   La famille est donc génératrice, et donc une base de E, qui n'est pas de dimension finie.