Devoir libre 1

Angers Le Fresne : BCPST 2

Pour le 23 septembre 2024

Exercice 1. Complexité du quicksort

On considère la suite $(C_n)_n$ définie par récurrence (forte) par $C_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$C_{n+1} = n + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(C_k + C_{n-k} \right).$$

1. Calculer les valeurs C_1, C_2, C_3 et C_4.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$,
$$C_{n+1} = n + \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_k.$$
3. On définit une nouvelle suite $(D_n)_n$ par $D_n = nC_n$.
   (a) Pour $n \geqslant 2$, calculer $D_n - D_{n-1}$. En déduire que $nC_n = 2(n-1) + (n+1)C_{n-1}$.
   (b) Est-ce vrai pour $n = 0$? pour $n = 1$?
4. On définit une nouvelle suite $(E_n)_n$ par $E_n = \frac{C_n}{n+1}$.
   (a) Calculer E_0 et E_1.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
   $$E_n = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + E_{n-1}.$$
   (c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$,
   $$E_n = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)}.$$
   (d) Est-ce vrai pour $n = 0$?
   (e) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, qu'on explicitera, tels que pour tout $k \geqslant 1$,
   $$\frac{k-1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$
   (f) On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
   $$E_n = 2H_n - \frac{4n}{n+1}.$$
   (g) En déduire une expression de C_n en fonction de n et H_n.
5. On admet que la suite $\left(\frac{H_n}{\ln n}\right)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de $\frac{C_n}{n \ln n}$?

Exercice 2. Une fonction

On suppose donnés $a, b, c \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b < c$ et $u, v, w \in \mathbb{R}^*$. On considère pour tout $t \neq 0$ l'équation d'inconnue λ

$$\frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c} = \frac{1}{t} \qquad (E_t).$$

1. Donner les variations de la fonction
$$F : \lambda \mapsto \frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c}.$$
En déduire que F prend la valeur 0 en deux points ρ_1 et ρ_2 vérifiant $\rho_1 < \rho_2$.
2. Tracer le graphe de la fonction F pour $a = -2$, $b = 0$, $c = 2$ et $u = v = w = 1$.
3. Dans la suite, a, b, c sont de nouveaux quelconques et vérifient $a < b < c$.
   (a) Montrer que pour tout $t \neq 0$, l'équation (E_t) admet trois racines réelles distinctes, notées $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \lambda_3(t)$.
   Indication : On distinguera deux cas, selon que $t > 0$ ou $t < 0$.
   (b) Montrer que $\lambda_1(t)$ tend vers a quand t tend vers 0 par valeurs positivees puis que $\lambda_1(t)$ tend vers a quand t tend vers 0 par valeurs négatives.

   On admettra que les deux fonctions λ_2 et λ_3 admettent également des limites en 0, respectivement b et c.
   On notera encore λ_1, λ_2 et λ_3 les fonctions prolongées par $\lambda_1(0) = a$, $\lambda_2(0) = b$, $\lambda_3(0) = c$.
4. Continuité et dérivabilité.
   (a) Montrer que les fonctions λ_1, λ_2 et λ_3 sont continues sur $\mathbb{R}$.
   (b) En utilisant l'égalité (E_t) pour $\lambda = \lambda_1(t)$, montrer que $\frac{\lambda_1(t) - a}{t}$ tend vers u^2 quand t tend vers 0.
   En déduire que λ_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer de même que λ_2 et λ_3 son dérivables sur $\mathbb{R}$; donner $\lambda_2'(0)$ et $\lambda_3'(0)$.
5. Étude des fonctions à l'infini.
   (a) Caractériser les limites éventuelles des fonctions λ_1, λ_2 et λ_3 lorsque t tend vers $+\infty$, puis lorsque t tend vers $-\infty$.
   Résumer les résultats sous forme d'un tableau à deux entrées.
   (b) Exprimer $\frac{u^2}{\lambda_1(t) - a}$ à l'aide de $\frac{1}{\lambda_1(t)}$, $\frac{1}{\lambda_1(t)^2}$ et d'une fonction négligeable devant $\frac{1}{\lambda_1(t)^2}$ quand t tend vers $-\infty$.
   En déduire l'existence d'une asymptote à la fonction λ_1 en $-\infty$. Qu'en est-il pour la fonction λ_3 en $+\infty$?
   (c) Dresser le tableau de variations des fonctions λ_1, λ_2 et λ_3. Tracer sur une même feuille les graphes de ces fonctions pour $a = -2$, $b = 0$, $c = 2$ et $u = v = w = 1$.