Devoir libre 1

Angers Le Fresne : BCPST 2

Pour le 23 septembre 2024

1 Complexité du quicksort

1. On a donc
$$C_1 = 0 + \frac{1}{1}(C_0 + C_0) = 0,$$
$$C_2 = 1 + \frac{1}{2}(C_0 + C_1 + C_1 + C_0) = 1,$$
$$C_3 = 2 + \frac{1}{3}(C_0 + C_2 + C_1 + C_1 + C_2 + C_0) = \frac{8}{3},$$
$$C_4 = 3 + \frac{1}{4}(C_0 + C_3 + C_1 + C_2 + C_2 + C_1 + C_3 + C_0) = \frac{29}{6}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\begin{aligned} C_{n+1} &= n + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(C_k + C_{n-k}) \\ &= n + \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} C_k + \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}\right) \\ &= n + \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_k \end{aligned}$$
par inversion d'indice.

3. (a) Soit $n \geqslant 2$. On a alors
$$\begin{aligned} D_n - D_{n-1} &= nC_n - (n-1)C_{n-1} \\ &= n\left(n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k\right) - (n-1)\left(n - 2 + \frac{2}{n-1}\sum_{k=0}^{n-2} C_k\right) \\ &= n(n-1) + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_k - (n-1)(n-2) - 2\sum_{k=0}^{n-2} C_k \\ &= 2(n-1) + 2C_{n-1} \end{aligned}$$
On a donc
$$nC_n = D_n = 2(n-1) + 2C_{n-1} + D_{n-1} = 2(n-1) + (n+1)C_{n-1}.$$
   (b) Pour $n = 0$, la formule n'a pas de sens. Pour $n = 1$, la formule reste vraie.

4. (a) On a clairement $E_0 = E_1 = 0$.
   (b) Divisons la formule de récurrence obtenue en 3a par $n(n+1)$:
$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + \frac{C_{n-1}}{n}.$$
On retrouve directement le résultat voulu.

(c) Montrons-le par récurrence.
Pour $n = 1$, la formule est vraie.
Supposons qu'elle le soit pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné. Alors

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= \frac{2n}{(n+1)(n+2)} + E_n \\ &= \frac{2n}{(n+1)(n+2)} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{k(k+1)} \end{aligned}$$

Par théorème de récurrence, la formule est donc vraie.

(d) Pour $n = 0$, la somme est vide, et donc nulle, et donc la formule reste vraie.

(e) En multipliant par k, on obtient

$$\frac{k-1}{k+1} = a + \frac{kb}{k+1},$$

puis en prenant $k = 0$, on a $a = -1$.
De même, en multipliant par $k+1$ et en prenant $k = -1$, on obtient $b = 2$.

(f) On a donc pour tout $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} E_n &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 2H_n \\ &= 4\sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{k} - 2H_n \\ &= 4(H_n + \frac{1}{n+1} - 1) - 2H_n \\ &= 2H_n + \frac{4}{n+1} - 4 \\ &= 2H_n + \frac{4n}{n+1} \end{aligned}$$

(g) On a donc pour tout n

$$C_n = 2(n+1)H_n - 4n.$$

5. On a

$$\frac{C_n}{n\ln n} = \frac{2(n+1)H_n}{n\ln n} - \frac{4n}{n\ln n},$$

et donc

$$\frac{C_n}{n\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2.$$

2 Une fonction

1. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{a, b, c\}$, et pour tout λ dans cet ensemble,

$$F'(\lambda) = -\left(\frac{u^2}{(\lambda-a)^2} + \frac{v^2}{(\lambda-v)^2} + \frac{w^2}{(\lambda-c)^2}\right) < 0.$$

La fonction est donc strictement décroissante sur chacun des intervalles où elle est définie :

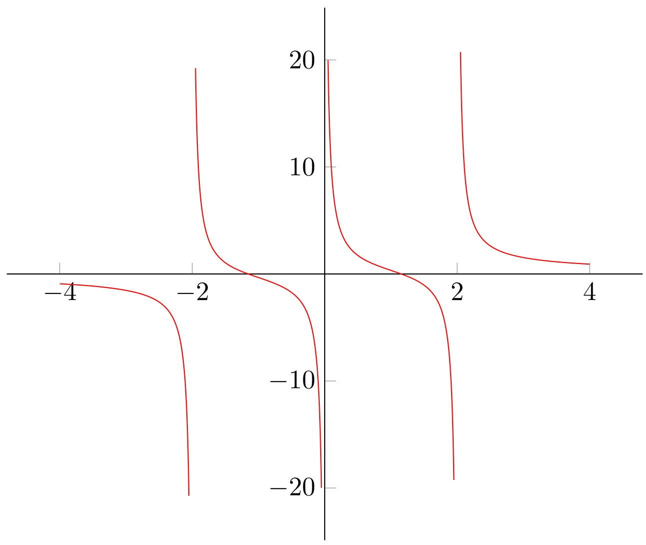
x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
F'		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	
F	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

Il suffit ensuite d'appliquer le théorème de la bijection, F étant bien continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

- F est strictement décroissante sur $]-\infty, a[$, et induit une bijection de cet intervalle vers $]-\infty, 0[$: elle ne s'y annule pas.
- F est strictement décroissante sur $]a, b[$, et induit donc une bijection de $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$: elle s'y annule exactement une fois, en $\rho_1 \in]a, b[$.
- F est strictement décroissante sur $]b, c[$, et induit donc une bijection de $]b, c[$ vers $\mathbb{R}$: elle s'y annule exactement une fois, en $\rho_2 \in]b, c[$.
- F est strictement décroissante sur $]b, \infty[$, et induit une bijection de cet intervalle vers $]0, \infty[$: elle ne s'y annule pas.

Finalement, F s'annule bien exactement deux fois.

2. On a la courbe suivante



3. (a) Supposons que $t > 0$. Alors de la même façon qu'en question 1, on utilise le théorème de la bijection sur chacun des intervalles :
   - sur $]-\infty, a[$, (E_t) n'a pas de solution
   - sur $]a, b[$, (E_t) a une solution
   - sur $]b, c[$, (E_t) a une solution
   - sur $]c, \infty[$, (E_t) a une solution

   De même, si $t < 0$:
   - sur $]-\infty, a[$, (E_t) a une solution
   - sur $]a, b[$, (E_t) a une solution
   - sur $]b, c[$, (E_t) a une solution

- sur $]c,\infty[$, (E_t) n'a pas de solution

(b) Quand $t>0$, on sait que $\lambda_1(t)\in]a,b[$. Soit G la réciproque de F sur $]a,b[$. On a alors

$$F(\lambda_1(t))=\frac{1}{t} \text{ donc } \lambda_1(t)=G(\frac{1}{t}).$$

Or, par limite de fonctions réciproque, $\lim_{x\to\infty} G(x)=a$, et donc $\lim_{t\to 0^+} G(\frac{1}{t})=a$.
De même, si $t<0$, alors $\lambda_1(t)\in]-\infty,a[$. Soit G la réciproque de F sur $]-\infty,a[$. On a alors $\lambda_1(t)=G(\frac{1}{t})\xrightarrow[t\to 0^-]{} a$.

4. (a) On a vu que d'apres le théorème de la bijection, F induisait des homéomorphismes sur quatre intervalle. On note alors
   - $G_1:]-\infty,0[\to]-\infty,a[$ la réciproque de F restreinte à $]-\infty,a[$
   - $G_2:\mathbb{R}\to]a,b[$ la réciproque de F restreinte à $]a,b[$
   - $G_3:\mathbb{R}\to]b,c[$ la réciproque de F restreinte à $]b,c[$
   - $G_4:]0,+\infty[\to]c,+\infty[$ la réciproque de F restreinte à $]c,+\infty[$

   Les fonctions G_i sont donc des fonctions continues, comme réciproque d'un homéomorphisme.
   On a alors

$$\lambda_1(t)=\begin{cases} G_1\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t<0\\ G_2\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t>0\end{cases},\quad \lambda_2(t)=\begin{cases} G_2\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t<0\\ G_3\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t>0\end{cases} \text{ et } \lambda_3(t)=\begin{cases} G_3\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t<0\\ G_4\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t>0\end{cases}.$$

   Les fonctions λ_i sont donc continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et ont été prolongées par continuité en 0, et sont donc continues sur $\mathbb{R}$.

   (b) On a donc pour tout $t\neq 0$

$$\frac{u^2}{\lambda_1(t)-a}+\frac{v^2}{\lambda_1(t)-b}+\frac{w^2}{\lambda_1(t)-c}=\frac{1}{t},$$

   d'où

$$\frac{\lambda_1(t)-1}{t}=u^2\frac{1}{1-\frac{tv^2}{\lambda_1(t)-b}+\frac{tw^2}{\lambda_1(t)-c}}.$$

   Or $\frac{tv^2}{\lambda_1(t)-b}$ et $\frac{tw^2}{\lambda_1(t)-c}$ tendent tous les deux vers 0 quand t tend vers 0 (les dénominateurs tendent respectivement vers $a-b\neq 0$ et $a-c\neq 0$), d'ou la limite demandée.
   Cette quantité étant le taux d'accroissement de la fonction λ_1 en 0, la foncion λ_1 est dérivable en 0, de nombre dérivé u^2.
   La fonction F est dérivable sur chaque intervalle où elle est définie, et sa dérivée ne s'annule pas, et donc les fonctions G_i sont aussi dérivables sur leurs intervalles de définition.
   La fonction λ_1 est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

   (c) Par le même calcul, λ_2 et λ_3 sont dérivables en 0, de nombre dérivés $\lambda_2'(0)=v^2$ et $\lambda_3'(0)=w^2$.
   Comme les G_i sont dérivables, les fonctions λ_2 et λ_3 sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

5. (a) Pour $t>0$, on a $\lambda_1(t)=G_2(\frac{1}{t})$. On a donc $\lim_{t\to\infty}\lambda_1(t)=G_2(0)=\rho_1$.
   Pour $t<0$, on a $\lambda_1(t)=G_1(\frac{1}{t})$, et donc $\lim_{t\to-\infty}\lambda_1(t)=\lim_{x\to 0^-}G_1(x)=-\infty$.
   On trouve de même $\lim_{t\to\infty}\lambda_2(t)=G_3(0)=\rho_2$ et $\lim_{t\to-\infty}\lambda_2(t)=G_2(0)=\rho_1$, et $\lim_{t\to\infty}\lambda_3(t)=+\infty$ et $\lim_{t\to-\infty}\lambda_2(t)=G_3(0)=\rho_2$.
   Finalement, on peut faire le tableau

t	$-\infty$	$+\infty$
λ_1	$-\infty$	ρ_1
λ_2	ρ_1	ρ_2
λ_3	ρ_2	$+\infty$

(b) On a quand $t \to -\infty$ (on note que $\frac{a}{\lambda_1(t)} \to 0$)

$$\begin{aligned}
\frac{u^2}{\lambda_1(t) - a} &= \frac{u^2}{\lambda_1(t)} \frac{1}{1 - \frac{a}{\lambda_1(t)}} \\
&= \frac{u^2}{\lambda_1(t)} \left(1 + \frac{a}{\lambda_1(t)} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\lambda_1(t)}\right)\right) \\
&= \frac{u^2}{\lambda_1(t)} + \frac{au^2}{\lambda_1(t)^2} + \underset{t\to-\infty}{\mathrm{o}} \left(\frac{1}{\lambda_1(t)^2}\right)
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\frac{v^2}{\lambda_1(t) - b} = \frac{v^2}{\lambda_1(t)} + \frac{bu^2}{\lambda_1(t)^2} + \underset{t\to-\infty}{\mathrm{o}} \left(\frac{1}{\lambda_1(t)^2}\right)$$

et

$$\frac{w^2}{\lambda_1(t) - c} = \frac{w^2}{\lambda_1(t)} + \frac{cu^2}{\lambda_1(t)^2} + \underset{t\to-\infty}{\mathrm{o}} \left(\frac{1}{\lambda_1(t)^2}\right).$$

On a donc

$$F(\lambda_1(t)) = \frac{u^2+v^2+w^2}{\lambda_1(t)} + \frac{au^2+bv^2+cw^2}{\lambda_1(t)^2} + \underset{t\to-\infty}{\mathrm{o}} \left(\frac{1}{\lambda_1(t)^2}\right) = \frac{1}{t},$$

et donc

$$\frac{u^2+v^2+w^2}{\lambda_1(t)} \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{1}{t},$$

d'où

$$\lambda_1(t) \underset{x\to-\infty}{(} \quad u^2+v^2+w^2)t.$$

En multipliant le développement d'ordre 2 par $t\lambda_1(t)$, on obtient

$$\lambda_1(t) = (u^2+v^2+w^2)t + \frac{(au^2+bv^2+cw^2)t}{\lambda_1(t)} + \underset{t\to-\infty}{\mathrm{o}} \left(\frac{1}{\lambda_1(t)}\right).$$

Quand $t \to -\infty$, le membre de droite tend vers $\frac{au^2+bv^2+cw^2}{u^2+v^2+w^2}$, d'où une asymptote d'équation

$$y = (u^2+v^2+w^2)t + \frac{au^2+bv^2+cw^2}{u^2+v^2+w^2}.$$

La même méthode montrer que cette droite est aussi asymptote de λ_3 en $+\infty$.

(c) La fonction F étant strictement décroissante sur chacun des intervalle où elle est définie, ses réciproques G_i sur chacun des intervalles sont donc aussi strictement décroissante. Comme les λ_i s'écrivent comme $G_j(\frac{1}{t})$, les fonctions sont donc strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et comme elles sont continues en 0, elles sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

On a donc les tableaux

t	$-\infty$	$+\infty$
$\lambda_1(t)$	$-\infty$ $\nearrow$	ρ_1

t	$-\infty$	$+\infty$
$\lambda_2(t)$	ρ_1 $\nearrow$	ρ_2

t	$-\infty$	$+\infty$
$\lambda_3(t)$	ρ_2 $\nearrow$	∞

On peut alors tracer les courbes :