Modélisation Mathématique et Informatique

2022

1. (a) On a une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants et homogène.
   Les solutions sont donc données par $x\colon t \mapsto Ke^{rt}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
   Avec la condition initiale, on obtient alors
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ x(t) = x_0 e^{rt}.$$
   (b) TODO
   (c) Avec ce modèle, la population de lièvre croît indéfiniment, de façon exponentielle, ce qui est impossible en pratique.
2. (a) Si x est petit, alors on peut négliger le terme $1 - \frac{x}{K}$, et on retrouve alors l'équation (1). On doit donc avoir une forme exponentielle pour la courbe.
   (b) x et r sont strictement positifs, et $1 - \frac{x}{K}$ est strictement positif si et seulement si $0 < x < K$.
   Ainsi, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ est positif si $0 < x < K$, négatif si $x > K$ et nul si $x = 0$ ou $x = K$.
   (c) Supposons que x s'annule en $t > 0$.
   Alors le problème de Cauchy composé de l'équation (2) et de la condition $x(t) = 0$ a deux solutions : x et la fonction nulle.
   Par unicité de la solution, on a donc $x = 0$, ce qui est incompatible avec la condition $x(0) > 0$.
   (d) Comme x ne s'annule pas, la fonction z est bien dérivable, et
   $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{x^2}\\ &= -\frac{rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)}{x^2}\\ &= -\left(\frac{r}{x} - \frac{r}{K}\right)\\ &= \frac{r}{K} - rz\end{aligned}$$
   (e) On a une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants, dont les solutions sont données par
   $$z\colon t \mapsto \frac{1}{K} + \lambda e^{-rt}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
   Avec la condition initiale, on a donc
   $$\forall t,\ z(t) = \frac{1}{K} + \left(z_0 - \frac{1}{K}\right) e^{-rt}.$$
   (f) On en déduit alors
   $$\forall t,\ x(t) = \frac{1}{\frac{1}{K} + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{K} e^{-rt}\right)}.$$
   (g) Quand t tend vers $+\infty$, on a donc $x(t) \to K$.
   (h) TODO
   (i) Avec la modélisation (2), la population est bornée. K représente alors un point d'équilibre vers lequel tend la population.

3. (a) Si y est nulle, alors on retrouve l'équation (1) : la population de lièvre croît exponentiellement.
   (b) Si x est nulle, le système se réduit à l'équation $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -my$, et donc la population de lynx décroît exponentiellement.

4. On a alors, par théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \\ &= \frac{q}{r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{1}{r} \\ &= \frac{q}{r^2}(rx - pxy) \\ &= \overline{x} - \overline{xy}\end{aligned}$$

   On trouve l'autre équation de la même façon.

5. (a) Soit donc (x, y) un point d'équilibre. La première équation nous donne donc $x = 0$ ou $y = 1$. Dans le premier cas, on retrouve $y = 0$, et dans le second $x = a$.
   (b) Ces points d'équilibres correspondent alors aux valeurs de x et y où les population évolue très peu.
   (c) À ces points d'équilibres, soit tous les animaux ont disparu, donc le système n'évolue plus, soit les mortalités sont compensées par les natalités, et les populations restent stables.

6. (a) La fonction f_c est dérivable, de dérivée $f_c'\colon u \mapsto 1 - \frac{c}{u}$.
   La fonction f_c est donc strictement croissante sur $[c, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, c]$. Elle atteint donc son minimum en $u = c$, qui vaut $c(1 - \ln c)$.
   (b) On a vu à la question précédente que le minimum n'est atteint qu'en $u = c$.
   (c) La fonction f_c est continue sur $\mathbb{R}_+$, strictement décroissante sur $]0, c[$ et strictement croissante sur $]c, +\infty[$. De plus, $\lim\limits_{u\to 0} f_c(u) = \lim\limits_{u\to+\infty} f_c(u) = +\infty$.
   Ainsi, par théorème de la bijection, l'équation $f_c(u) = M$ possède exactement deux solutions, l'une b sur $]0, c[$ et l'autre B sur $]c, +\infty[$.
   Si $b \leqslant u \leqslant B$, on a bien $f_c(u) \leqslant M$, et sinon $f_c(u) > M$. D'où l'équivalence demandée.

7. (a) i. On note que $V(x, y) = f_a(x) + f_1(y)$, et par 6a, $f_1(y) \geqslant 1$.
   On a donc $V(x(s), y(s)) \geqslant f_a(x(s)) + 1$ et on retrouve l'inégalité demandée.
   On trouve de même l'autre inégalité.
   ii. Soit $\varphi\colon s \mapsto V(x(s), y(s))$. Alors φ est dérivable, et par dérivation des fonctions composées, on a

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}(s)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x(s), y(s)) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}(s)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}(x(s), y(s)) \\ &= (x(s) - x(s)y(s))\left(1 - \frac{a}{x(s)}\right) + (-ax(s) + x(s)y(s))\left(1 - \frac{1}{y(s)}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

   La fonction est donc bien constante.
   iii. Par les questions 6c et 7ai, on a donc bien les encadrement demandés.
   (b) On a déjà vu que $V(x, y)f_a(x) + f_1(y)$, et par 6a,

$$V(x, y) \geqslant a(1 - \ln a) + 1,$$

   avec égalité si et seulement si $x = a$ et $y = 1$ par 6b.
   (c) i. Par 7aiii, les populations sont bornées entre $b > 0$ et B et donc ne peuvent ni s'éteindre, ni devenir arbitrairement grandes.
   ii. Si $x = x^*$ et $y = y^*$, alors le système n'évolue pas.
   iii. On peut envisager soit un système qui n'évolue pas, soit des fonctions x et y périodiques.

8. On a donc

$$\begin{aligned} v_{k+1}-v_k &= x_{k+1}-a\ln(x_{k+1})+y_{k+1}-\ln(y_k)-x_k+a\ln(x_k)-y_k+\ln(y_k) \\ &= x_k+hx_k-hx_ky_k-a\ln(x_k)-a\ln(1+h-hy_k)+y_k-ahy_k+hx_ky_k-\ln(y_k) \\ &\quad -\ln(1-ha+hx_k)-x_k+a\ln(x_k)-y_k+\ln(y_k) \\ &= hx_k-a\ln(1+h-hy_k)-ahy_k-\ln(1-ha+hx_k) \end{aligned}$$

9. (a) On montre facilement que pour tout x, $\ln(1+x)\leqslant x$, avec égalité si et seulement si $x=0$. On en déduit donc que
$$-a\ln(1+h-hy_k)-ahy_k \geqslant -ah,$$
et
$$hx_k-\ln(1-ha+hx_k)\geqslant ah.$$
En ajoutant ces deux inégalités, on trouve le résultat voulu.

   (b) D'après le cas d'égalité vu dans la question précédente, on a donc égalité si et seulement si $h-hy_k=0$ et $hx_k-ha=0$, soit $y_k=1$ et $x_k=a$.

10. En remplaçant x et y par les suites (x_k) et (y_k), on ne retrouve plus la conservation de V vue en 7aii.

11. (a) Il suffit de taper l'instruction

```
import math as m

```

   (b) La commande `liste(1,0.2)` renvoie `[0,0.2,0.4,0.6,0.8,1]` et `liste(1,0.3)` renvoie `[0,0.3,0.6,0.9]`.
De façon générale, `liste(T,h)` renvoie une liste contenant des valeurs, partant de 0, avec un pas de `h`, la dernière valeur étant le plus grand multiple de `h` inférieur à `T`.

   (c) La liste `Ls` contient les valeurs des images des éléments de `Lt` par la fonction `sol`.
Cette fonction trace donc une approximation de la courbe de la fonction $t\mapsto e^{rt}$.

12. (a) i. `L[1]` vaut `[7]`.
   ii. `L[0][1]` vaut 1.
   iii. `len(L)` vaut 3
   iv. Après exécution, `L` vaut `[[3,1],[7],[1,9,8,0],9.75]`.

   (b) On propose

```
def lapin(x,y):
    return x-x*y

def lynx(x,y):
    return -a*y+x*y

```

   (c) On complète :

```
def resol_1(x0, y0, T, h):
    x = x0; y = y0
    t = 0
    Lx = [x]
    Ly = [y]
    Lt = [t]
    while t+h <= T:
        x,y = x+h*(x-x*y), y+h*(-a*y+x*y)
        t = t+h
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
```

```
        Lt.append(t)
    return [Lt, Lx, Ly]

```

(d) La première ligne de `trace_pop_1` permet de récupérer les trois listes (t_k), (x_k) et (y_k).
La deuxième ligne trace la population de lapins en fonction du temps.
La troisième ligne trace la population de lynx en fonction du temps.
La quatrième ligne affiche les courbes.

(e) La population de lapins part de $x_0 = 1$, donc correspond à la courbe en trait plein. Celle de lynx correspond donc à la courbe en pointillés.

(f) On propose

```
def trace_V_1():
    Lt,Lx,Ly = resol_1(x0,y0,T,h)
    Lv = []
    for i in range(len(Lt)):
        Lv.append(fonctionV(Lx[i],Ly[i]))
    plt.plot(Lt,Lv)
    plt.show()

```

13. (a) On propose

```
def resol_2(x0,y0,T,h):
    x = x0; y = y0
    t = 0
    Lx = [x]
    Ly = [y]
    Lt = [t]
    while t+h<=T:
        u = x+h*(x-x*y)
        v = y+h*(-a*y-x*y)
        x,y = x+(h/2)*(x-x*y+u-u*w), y+(h/2)*(-a*y+x*y-a*w+u*w)
        t=t+h
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
        Lt.append(t)
    return [Lt, Lx, Ly]

```

(b) Il suffit alors de remplacer `resol_1` à la première ligne par `resol_2`.

(c) La courbe de V avec la méthode Heun semble être plus proche d'être constante, et donc cette méthode semble plus satisfaisante.

14. Dans la figure 1, les pics de population sont de plus en plus grand, et semblent tendre vers $+\infty$, ce qui contredit le résultat de 7ci. Ce problème n'est pas présent avec la méthode de Heun, qui permet de ne pas cumuler les erreurs comme peut le faire la méthode d'Euler.

15. Comme prévu en 7ciii, les populations sont des courbes périodiques :

- avec beaucoup de lapins et peu de lynx, la population de lapins croît rapidement
- la présence de beaucoup de lapin favorise la reproduction des lynx
- le grand nombre de lynx diminue la population de lapin
- la diminution du nombre de lapin entraîne la diminution du nombre de lynx