Devoir libre 3

Angers Le Fresne : BCPST 2

Pour le 14 octobre 2024

Exercice 1. Répartition de boules dans des boîtes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boîtes vides numérotées de 1 à n et de boules toutes différentes, en quantité non limitée, que l'on répartit une à une au hasard dans les boîtes.

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout entier j tel que $0 \leq j \leq n - 1$, on notera $p_j(r, n)$ la probabilité qu'il reste exactement j boîtes vides après la répartition de r boules.

- Justifier que le nombre de répartitions possibles de r boules dans les n boîtes est n^r .
- On note $A(r, n)$ le nombre de répartitions de r boules dans les n boîtes telles qu'aucune boîte ne soit vide.
 - Déterminer $A(r, 1)$, $A(r, 2)$ et $A(r, n)$ pour $r < n$.
 - En considérant le nombre de boules contenues dans la boîte numéro $n + 1$, montrer que

$$A(r, n + 1) = \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} A(r - k, n). \quad (1)$$

- Montrer par récurrence sur n et en utilisant la formule (1) que

$$A(r, n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n - i)^r \quad (2)$$

- En déduire $p_0(r, n)$. On exprimera $p_0(r, n)$ en fonction des $u_i(r, n)$ définis par $u_i(r, n) = \binom{n}{i} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^r$.
- Exprimer en fonction de $A(r, n - j)$ le nombre de répartitions de r boules dans les n boîtes qui laissent exactement j boîtes vides.
 - En déduire que $p_j(r, n) = u_j(r, n)p_0(r, n - j)$.
 - Simulation informatique.

L'ensemble des boîtes sera représenté par une liste, chaque case de la liste étant occupée par la liste des boules qui s'y trouvent. On considérera que les boules sont numérotées.

On suppose qu'on a exécuté le code suivant :

```
import random as rd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

- Écrire une fonction `repartition` prenant en paramètre deux entiers naturels non nuls n et r et simulant une répartition aléatoire de r boules dans n boîtes.
- Écrire une fonction `nombreVide` prenant en paramètre une liste de boîtes, et renvoyant le nombre de boîtes vides.
- Proposer un programme Python permettant de calculer une approximation expérimentale des probabilités $p_j(r, n)$ pour $r = \lfloor n \ln \left(\frac{n}{2}\right) \rfloor$, puis les affichant dans un diagramme en barres.

On suppose maintenant qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r = n \ln \left(\frac{n}{\lambda}\right)$.

6. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \lambda$. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{\lambda^{N+k}}{(N+k)!} \leq \frac{\lambda^N}{N!} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k.$$

En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\lambda^{N+k}}{(N+k)!}$ converge et que

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{N+k}}{(N+k)!} \leq \frac{\lambda^N}{N!} \frac{\lambda}{N-\lambda}.$$

7. (a) Calculer $e^{-\frac{r}{n}}$.

(b) Montrer que pour tout $t > -1$, $\ln(1+t) \leq t$.

(c) Montrer que $u_i(r, n) = \frac{n^i}{i!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \left(1 - \frac{i}{n}\right)^r$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

(d) En déduire que $0 \leq u_i(r, n) \leq \frac{\lambda^i}{i!}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

8. (a) Rappeler la valeur de $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\lambda^i}{i!}$.

(b) On fixe un entier N tel que $N > \lambda$ et on suppose $n > N$.

Montrer que

$$\left| \sum_{i=N+1}^{\infty} (-1)^i \frac{\lambda^i}{i!} \right| \leq \frac{\lambda^N}{N!} \frac{\lambda}{N-\lambda} \text{ et } \left| \sum_{i=N+1}^{n-1} (-1)^i u_i(r, n) \right| \leq \frac{\lambda^N}{N!} \frac{\lambda}{N-\lambda}.$$

En déduire que

$$\left| e^{-\lambda} - p_0(r, n) \right| \leq \left| \sum_{i=0}^N (-1)^i \left(\frac{\lambda^i}{i!} - u_i(r, n) \right) \right| + 2 \frac{\lambda^N}{N!} \frac{\lambda}{N-\lambda}.$$

(c) En utilisant la question 6c, montrer que pour tout entier i fixé tel que $i \leq N$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_i(r, n) = \frac{\lambda^i}{i!}$.

En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \lambda$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| e^{-\lambda} - p_0(r, n) \right| \leq 2 \frac{\lambda^N}{N!} \frac{\lambda}{N-\lambda}.$$

(d) Calculer $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda^N}{N!} \frac{\lambda}{N-\lambda}$ puis en déduire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_0(r, n) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} p_j(r, n).$$

Exercice 2. G2E 2010, Problème 2

Soit t un réel strictement positif.

On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de $x_0 = t$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

1. (a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g: x \mapsto \sqrt{x} - x$. Étudier le signe de g .

(b) Montrer que si $t \geq 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq x_{n+1} \leq x_n$. En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

(c) Étudier $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $t < 1$.

On considère également les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n(x_n - 1) \text{ et } v_n = 2^n \left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{u_n}{x_n}.$$

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ en fonction de x_{n+1} . En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Déterminer de même le sens de variation de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \geq 0$.
5. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.
6. Dédire de la question 1 que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont la même limite, que l'on notera L .
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner un encadrement de L à l'aide de u_n et v_n . En déduire que pour tout réel t strictement positif, on a :

$$1 - \frac{1}{t} \leq L \leq t - 1.$$

L est un nombre réel dépendant de la donnée de x_0 , c'est-à-dire de t .

Nous pouvons alors considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = L$.

Pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous poserons : $x_n(t) = x_n$; $u_n(t) = u_n$; $v_n(t) = v_n$, pour indiquer que ces réels dépendent aussi de t .

8. Déterminer $f(1)$.

9. Calculer

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)}{t - 1}.$$

En déduire que f est dérivable en 1, et donner $f'(1)$.

10. (a) Montrer que

$$\forall t_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall t_2 \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, x_n(t_1 \cdot t_2) = x_n(t_1) \cdot x_n(t_2).$$

(b) En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n(t_1 \cdot t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2)).$$

(c) Donner une relation entre $f(t_1 \cdot t_2)$, $f(t_1)$ et $f(t_2)$.

11. (a) Montrer que, pour tout réel t strictement positif et tout réel h tel que $t + h$ soit strictement positif, on a :

$$f(t + h) = f(t) + f\left(1 + \frac{h}{t}\right).$$

(b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

(c) En justifiant votre réponse, exprimer la fonction f à l'aide de fonctions usuelles.

12. Exprimer pour tout entier naturel n , x_n , en fonction de n et t . Retrouver alors directement le résultat de 11.c.