Devoir libre 2

Angers Le Fresne : BCPST 2

Pour le 6 novembre 2023

Exercice 1. Étude d'une fonction définie par une intégrale

Le plan usuel est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Nous considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$$

Partie A. Étude de la fonction f.

1. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x)$.
   (a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0, x \in \mathbb{R}_+^*$ admet une unique solution, notée α dans la suite.
   (c) En déduire le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+^*$

Partie B. Étude de la primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1

Dans la suite , F désigne la primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

1. Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+^*$
2. Étude de la limite de F en 0
   (a) Considérons la fonction u définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x}$.
   Montrer que u est prolongeable par continuité en 0.
   Dans la suite, u désigne la fonction ainsi prolongée en 0. u est désormais une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Par une intégration par parties, montrer que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad F(x) = \arctan(x)\ln(x) - \int_1^x u(t)\mathrm{d}t$$

   .
   (c) En déduire que F admet une limite finie en 0 et que cette limite en 0 est égale à $\int_0^1 u(t)\mathrm{d}t$.
   Nous décidons alors de prolonger F par continuité en 0 en posant $F(0) = \int_0^1 u(t)\mathrm{d}t$.
   La fonction F est alors définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Calculons une valeur approchée de $F(0)$:
   (a) Soit x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, k appartenant à $\mathbb{N}$. Calculer

   $$I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t)\mathrm{d}t.$$

(b) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

.

Montrer que

$$\forall x \in]0,1[, \ F(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k} + (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

. En déduire que

$$\forall x \in]0,1[, \ \left| F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k} \right| \leq I_{2n+2}(x)$$

En déduire que

$$\left| F(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$$

.

(c) Nous décidons de choisir comme valeur approchée de $F(0)$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n peut-on affirmer que $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}, n \in \mathbb{N}$ est une valeur approchée de $F(0)$ à 10^{-4} près ?
Écrire un algorithme en Python qui calcule une valeur approchée de $F(0)$ à ε près , ε étant un réel strictement positif choisi par l'utilisateur.

4. Étudions la dérivabilité de F en 0.

   (a) Déterminer la limite de F' en 0 .

   (b) Montrer que F n'est pas dérivable en 0.

5. Étudions la limite de F en $+\infty$.

   (a) Montrer par changement de variable que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$$

   (b) En déduire la limite de F en $+\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.

6. Tracer la courbe représentative de F.

Exercice 2. Des approximations de π

Partie A. L'approximation $\pi \simeq \frac{22}{7}$

On souhaite dans cette partie déterminer l'erreur faite lorqu'on approxime le réel π par $\frac{22}{7}$.

1. Pour $a, b \in \mathbb{N}$, on pose

   $$I_{a,b} = \int_0^1 x^a (1-x)^b \mathrm{d}x.$$

   (a) Calculer $I_{a,0}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.

   (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

   $$\forall a \in \mathbb{N}, \ \forall b \in \mathbb{N}^*, \ \ I_{a,b} = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}.$$

(c) En déduire que pour tous $a, b \in \mathbb{N}$,

$$I_{a,b} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

2. Soient f, g, h les fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f(t) = \frac{1}{2}t^4(1-t)^4,\ g(t) = \frac{t^4(1-t)^4}{1+t^2} \text{ et } h(t) = \frac{1}{16}t^2(1-t)^2.$$

(a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) \leqslant g(t) \leqslant h(t)$.

(b) Calculer $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible

Indication : on pourra se servir de la question 1. On donne $\frac{4!^2}{9!} = \frac{1}{630}$.

(c) Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 2, qu'on explicitera, tel que

$$(1-t)^4 + 4 = (1+t^2)P(t).$$

Indication : on pourra chercher des racines complexes évidentes du polynôme de gauche.

(d) En déduire $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$.

3. Donner alors un encadrement de $\frac{22}{7} - \pi$.

Partie B. Formule de Machin

On veut établir la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

On pose $a = \arctan\frac{1}{5}$ et $b = \arctan\frac{1}{239}$.

4. Rappeler la formule de la tangente d'une somme $\tan(x+y)$.

5. Calculer $\tan(2a)$ puis $\tan(4a)$; on donnera les résultats sous forme d'une fraction irréductible.

6. Calculer $\tan\left(4a - \frac{\pi}{4}\right)$.

7. Montrer que $0 < a < \frac{\pi}{6}$, puis que $a - \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

8. En déduire la formule de Machin.

9. On veut trouver une valeur approchée de π en Python.

(a) Rappeler le développement limité de la fonction arctan au voisinage de 0, à l'ordre n.

(b) Écrire une fonction `arctanDL` prenant en paramètre un entier `n` et un réel `x`, et qui renvoie la valeur de la partie régulière du développement limité de la fonction arctan au voisinage de 0 à l'ordre $2n+1$.

(c) Écrire alors une fonction ayant un paramètre `n` et qui renvoie une approximation de π en utilisant la formule de Machin (en approximant les arctan par les parties régulières de leurs développements limités à l'ordre $2n+1$), sans utiliser la bibliothèque `math`.