Devoir libre 2

Angers Le Fresne : BCPST 2

Pour le 14 octobre 2024

Exercice 1. Répartition de boules dans des boîtes

1. Chaque boule "choisit" indépendamment une boîte parmi les n disponibles, et on a donc n^r.

2. (a) S'il n'y a qu'une boîte disponible, le nombre de boules étant non nul, il est clair qu'il n'y aura aucune boîte vide, donc $A(r,1) = 1$.
   Pour deux boîtes, seules deux répartitions laissent une boîte vide, et donc $A(r,2) = 2^r - 2$.
   Si $r < n$, il n'y a pas de répartition remplissant toutes les boîtes, et donc $A(r,n) = 0$.

   (b) Soit une répartition ne laissant aucune boîte vide. Soit alors k le nombre de boules dans la boîte $n+1$. Il reste alors $r-k$ boules à répartir.
   Ceci étant valide pour tous les k de 1 à $r-1$, avec $\binom{r}{k}$ choix pour les k boules à mettre dans la dernière urne, on a bien

$$A(r, n+1) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{r}{k} A(r-k, n).$$

   (c) Soit φ_n la proposition

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^r.$$

   - Par la question 1, on a bien φ_1.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons φ_n. On a alors, pour $r \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
A(r,n+1) &= \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} A(r-k,n) \quad \text{par 2a} \\
&= \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^{r-k} \quad \text{par } \varphi_n \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (-1)^i \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} (n-i)^{r-k} \quad \text{en échangeant les sommes finies} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (-1)^i \left((n-i+1)^r - (n-i)^r - 1\right) \quad \text{par le binôme de Newton} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (-1)^i (n-(i-1))^r - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)^r - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (-1)^i \\
&= (n+1)^r - (-1)^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} (-1)^i (n-(i-1))^r - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)^r \\
&= (n+1)^r - (-1)^n - \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i+1} (-1)^i (n-i)^r - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)^r \\
&= (n+1)^r - (-1)^n - n(-1)^{n-1} - \sum_{i=0}^{n-2} \left(\binom{n}{i+1} + \binom{n}{i} \right) (-1)^i (n-i)^r \\
&= (n+1)^r - (-1)^n - n(-1)^{n-1} - \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n+1}{i+1} (-1)^i (n-i)^r \\
&= (n+1)^r - (-1)^n - n(-1)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n+1}{i} (-1)^i (n+1-i)^r \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^i (n+1-i)^r
\end{aligned}$$

(d) On a donc, par les questions 1 et 2c,

$$p_0(r,n) = \frac{A(r,n)}{n^r} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i u_i(r,n).$$

3. On commence par choisir quelles boîtes resteront vides ($\binom{n}{j}$ choix), puis on répartit les boules dans les $n-j$ boîtes restantes, sans en laisser vide ($A(r,n-j)$ choix).
   Finalement, on a donc $\binom{n}{j} A(r,n-j)$ répartitions laissant exactement j boîtes vides.

4. On a donc

$$\begin{aligned}
p_j(r,n) &= \frac{\binom{n}{j} A(r,n-j)}{n^r} \\
&= \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{n-j-1} (-1)^i \binom{n-j}{i} \left(1 - \frac{j}{n} - \frac{i}{n}\right)^r \\
&= \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{n-j-1} (-1)^i \binom{n-j}{i} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^r \left(1 - \frac{i}{n-j}\right)^r \\
&= u_j(r,n) p_0(r,n-j)
\end{aligned}$$

5. On propose le code suivant :

```
def repartition(r,n):
    l = [[] for _ in range(n)]
    for i in range(r):
        boite = rd.randint(0,n-1)
        l[boite].append(i)
    return l

def nombreVide(l):
```

```python
    cmpt = 0
    for elem in l:
        if elem==[]:
            cmpt += 1
    return cmpt

def simul(n,N):
    r = int(np.floor(n*np.log(n/2)))
    res = [0 for _ in range(n)]
    for _ in range(N):
        j = nombreVide(repartition(r,n))
        res[j] += 1
    res = [elem/N for elem in res]
    plt.bar(range(n),res)
    plt.show()
    return res
```

6. On note que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$(N+k)! = N!(N+1)\cdots(N+k) \geqslant N!N^k.$$
On retrouve alors bien l'inégalité demandée.

   Tous les termes étant positifs, et la série $\sum \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k$ étant convergente comme série géométrique à raison dans $]-1,1[$, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{\lambda^{N+k}}{(N+k)!}$ converge, et
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{N+k}}{(N+k)!} \leqslant \frac{\lambda^N}{N!} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k = \frac{\lambda^N}{N!} \frac{\lambda}{N-\lambda}.$$
De plus, la série étant à termes strictement positifs, sa somme l'est aussi.

7. (a) On a directement $e^{-\frac{r}{n}} = \frac{\lambda}{n}$.
   (b) Une étude rapide la fonction $t > -1 \mapsto t - \ln(1+t)$ permet de conclure.
   (c) Montrons par récurrence sur $i \in \mathbb{N}^*$ la propriété φ_i
$$\forall n \geqslant i+1,\ \binom{n}{i} = \frac{n^i}{i!} \prod_{k=1}^{i-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right).$$
   - Pour $i = 1$, c'est évident.
   - Soit $i \in \mathbb{N}^*$, et supposons φ_i. Alors pour $n \geqslant i+2$,
$$\begin{aligned}\binom{n}{i+1} &= \frac{n-i}{i+1}\binom{n}{i} \\ &= \frac{n\left(1-\frac{i}{n}\right)}{i+1} \frac{n^i}{i!} \prod_{k=1}^{i-1}\left(1-\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{n^{i+1}}{(i+1)!} \prod_{k=1}^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$
     On a bien φ_{i+1}.

   Finalement, par récurrence, on a bien φ_i pour tout i, et donc l'égalité demandée.
   (d) Il est clair que $u_i(r,n) \geqslant 0$.

Ensuite, d'après la question précédente, en notant que $n = \lambda e^r$, on a

$$\begin{aligned}
u_i(r,n) &= \frac{n^i}{i!}\prod_{k=1}^{i-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)e^{r\ln(1-\frac{i}{n})} \\
&\leqslant \frac{n^i}{i!}\prod_{k=1}^{i-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)e^{-\frac{ir}{n}} \\
&\leqslant \frac{n^i}{i!}e^{-\frac{ir}{n}} \quad \text{les termes du produit étant dans }]0,1[\\
&\leqslant \frac{n^i}{i!}\frac{\lambda^i}{n^i} \\
&\leqslant \frac{\lambda^i}{i!}
\end{aligned}$$

8. (a) On reconnaît une série exponentielle, et la somme vaut donc $e^{-\lambda}$.

   (b) Tout d'abord, la série exponentielle convergeant absolument, on a par inégalité triangulaire

   $$\left|\sum_{i=N+1}^{\infty}(-1)^i\frac{\lambda^i}{i!}\right| \leqslant \sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!},$$

   puis par changement d'indice

   $$\left|\sum_{i=N+1}^{\infty}(-1)^i\frac{\lambda^i}{i!}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{N+k}}{(N+k)!},$$

   et on conclut par la question 6.
   Pour la seconde inégalité, il suffit d'utiliser le résultat de la question 7d.
   On a donc

   $$\begin{aligned}
   \left|e^{-\lambda}-p_0(r,n)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{\lambda^i}{i!}-\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i u_i(r,n)\right| \\
   &= \left|\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\left(\frac{\lambda^i}{i!}-u_i(r,n)\right)+\sum_{i=N+1}^{\infty}(-1)^i\frac{\lambda^i}{i!}+\sum_{i=N+1}^{n-1}(-1)^i u_i(r,n)\right| \\
   &\leqslant \left|\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\left(\frac{\lambda^i}{i!}-u_i(r,n)\right)\right|+\left|\sum_{i=N+1}^{\infty}(-1)^i\frac{\lambda^i}{i!}\right|+\left|\sum_{i=N+1}^{n-1}(-1)^i u_i(r,n)\right| \\
   &\leqslant \left|\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\left(\frac{\lambda^i}{i!}-u_i(r,n)\right)\right|+2\frac{\lambda^N}{N!}\frac{\lambda}{N-\lambda}
   \end{aligned}$$

   (c) Quand $n \to \infty$, on a

   $$\begin{aligned}
   \left(1-\frac{i}{n}\right)^r &= e^{r\ln\left(1-\frac{i}{n}\right)} \\
   &= e^{r\left(-\frac{i}{n}-\frac{i^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\
   &= e^{-i\ln\left(\frac{n}{\lambda}\right)-i^2\frac{\ln\left(\frac{n}{\lambda}\right)}{n}+o\left(\frac{\ln\left(\frac{n}{\lambda}\right)}{n}\right)} \\
   &\sim \frac{\lambda^i}{n^i}
   \end{aligned}$$

   Les autres termes du produit tendant vers 1, on a bien la limite cherchée.
   Dans l'inégalité 8b, la somme tend donc vers 0, et on a bien l'inégalité cherchée.

   (d) Par croissance comparée, on a

   $$\lim_{N\to\infty}\frac{\lambda^N}{N!}\frac{\lambda}{N-\lambda}=0,$$

   et donc quand $n \to \infty$, on a

   $$\lim_{n\to\infty}p_0(r,n)=e^{-\lambda}.$$

   On a donc

   $$\lim_{n\to\infty}p_j(r,n)=\lim_{n\to\infty}u_j(r,n)p_0(r,n-j)=\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}.$$

Exercice 2. G2E 2010, Problème 2

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

La fonction g est donc croissante sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{4}, \infty\right[$.

Elle est alors positive sur $[0, 1]$ et négative sur $[1, \infty[$.

(b) Supposons $t \geqslant 1$. Montrons par récurrence la propriété φ_n : "$1 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$".

- φ_0 est évidente, car $\sqrt{t} \leqslant t$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose φ_n.
  On a alors $x_{n+2} \leqslant x_{n+1}$ d'après l'étude du signe de g, et $x_{n+2} \geqslant 1$.

Par théorème de récurrence, on a bien montré φ_n pour tout n.

La suite (x_n) est donc minorée par 1 et décroissante, et converge donc. Sa limite vérifie alors $\ell = \sqrt{\ell}$, et donc $\ell = 1$, le cas $\ell = 0$ étant exclu d'après la minoration.

(c) De même que dans la question précédente, on montre que pour tout n

$$1 \geqslant x_{n+1} \geqslant x_n.$$

La suite est donc croissante et majorée par 1, et donc converge.

Sa limite vérifie alors $\ell = \sqrt{\ell}$, et donc $\ell = 1$ (le cas $\ell = 0$ est impossible la suite étant minorée par $t > 0$).

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1}(x_{n+1} - 1) - 2^n(x_{n+1}^2 - 1) \\ &= -2^n(x_{n+1} - 1)^2 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

3. Un calcul analogue donne pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2^n}{x_{n+1}^2}(x_{n+1} - 1)^2.$$

La suite (v_n) est donc croissante.

4. On a pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_n - v_n = 2^n \frac{(x_n - 1)^2}{x_n}.$$

On a bien $u_n - v_n \geqslant 0$.

5. D'après les trois questions précédentes, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n \geqslant v_0 \text{ et } v_n \leqslant u_0.$$

La suite (u_n) (resp. (v_n)) est donc décroissante et minorée (resp. croissante et majorée), donc converge.

6. Notons a et b les limites de (u_n) et (v_n) respectivement. En passant à la limite dans la relation $v_n = \frac{u_n}{x_n}$, d'après la question 1, on a $b = a$.

7. Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes, et donc pour tout n

$$u_n \geqslant L \geqslant v_n.$$

En particulier, on a pour $n = 0$

$$t - 1 \geqslant L \geqslant 1 - \frac{1}{t}.$$

8. Si $t = 1$, l'inégalité précédente donne directement $f(1) = 1$.

9. On a pour tout $t > 0$

$$t - 1 \geqslant f(t) \geqslant 1 - \frac{1}{t}.$$

On a donc pour tout $t > 1$

$$1 \geqslant \frac{f(t)}{t-1} \geqslant \frac{1}{t},$$

et par encadrement, on a une limite à droite qui vaut 1.
De la même façon, le taux d'accroissement admet une limite à gauche qui vaut 1, et donc

$$\lim_{t \to 1} \frac{f(t)}{t-1} = 1.$$

La fonction f est donc dérivable en 1, et $f'(1) = 1$.

10. (a) Montrons par récurrence la propriété φ_n : "$\forall t_1, t_2 > 0,\ x_n(t_1 t_2) = x_n(t_1)x_n(t_2)$".
   - C'est évident pour $n = 0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose φ_n. Alors

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t_1t_2) &= \sqrt{x_n(t_1t_2)} \\ &= \sqrt{x_n(t_1)x_n(t_2)} \quad \text{par } \varphi_n \\ &= \sqrt{x_n(t_1)}\sqrt{x_n(t_2)} \\ &= x_{n+1}(t_1)x_{n+1}(t_2) \end{aligned}$$

   Par récurrence, on a bien la propriété demandée.

   (b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_n(t_1t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2) &= 2^n(x_n(t_1t_2) - 1) - 2^n(x_n(t_1) - 1) - 2^n(x_n(t-2) - 1) \\ &= 2^n\ (x_n(t_1)x_n(t_2) - x_n(t_1) - x_n(t_2) +\ 1) \\ &= 2^n(x_n(t_1) - 1)(x_n(t_2) - 1) \\ &= 2^{-n}u_n(t_1)u_n(t_2) \end{aligned}$$

   Les suites $(u_n(t))$ étant convergentes, la limite cherchée vaut 0.

   (c) Par opération sur les limites, toutes les suites étant convergentes, on a donc

$$\lim u_n(t_1t_2) = \lim u_n(t_1) + \lim u_n(t_2),$$

   c'est-à-dire exactement

$$f(t_1t_2) = f(t_1) + f(t_2).$$

11. (a) Soient $t > 0$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $t + h > 0$. Alors $1 + \frac{h}{t} > 0$, et par la question précédente,

$$f(t) + f\left(1 + \frac{h}{t}\right) = f\left(t\left(1 + \frac{h}{t}\right)\right) = f(t+h).$$

   (b) La fonction f est dérivable en 1, et donc y admet le développement limité

$$f(1+x) = x + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x)\,.$$

   On a donc, avec t et h comme dans la question précédente

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{1}{t} + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(1) \to \frac{1}{t}.$$

   La fonction f est donc dérivable en t, et $f'(t) = \frac{1}{t}$.

   (c) f est donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction inverse, et comme $f(1) = 0$, on a $f = \ln$.

12. On montre par récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_n(t) = t^{\frac{1}{2^n}} = \exp\left(\frac{\ln(t)}{2^n}\right).$$

On a donc $u_n(t) = 2^n\left(\exp\left(\frac{\ln(t)}{2^n} - 1\right)\right)$, et donc

$$u_n(t) \sim 2^n \frac{\ln(t)}{2^n} = \ln(t).$$

On retrouve alors bien $f = \ln$.