Devoir libre 2

Angers Le Fresne : BCPST 2

Pour le 6 novembre 2023

Exercice 1. Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et
$$\forall x > 0,\ g'(x) = 2x - 4x\ln(x) - 2x = -4x\ln(x).$$
Ainsi, la fonction g est croissante sur $]0,1[$ et décroissante sur $]1,+\infty[$.
On a par croissances comparées $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

   (b) Sur $]0,1]$, la fonction g est strictement positive, donc ne s'annule pas. Elle est continue et décroissante strictement sur $]1,+\infty[$, d'image $]-\infty,2[$, donc induit une bijection de $]1,+\infty[$ dans $]-\infty,2[$.
L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution.

   (c) La fonction g est donc positive sur $]0,\alpha[$, et négative sur $]\alpha,+\infty[$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec
$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x} + x - 2x\ln(x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2\ln(x)}{x(1+x^2)^2}.$$
Elle est donc croissante sur $]0,\alpha[$ et décroissante sur $]\alpha,+\infty[$.
Par croissances comparées, elle tend vers $-\infty$ en 0, et vers 0 en $+\infty$.

3. Par théorème fondamental de l'intégration, comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction F y est dérivable, et $F' = f$.
Ainsi, F est décroissante sur $]0,1[$ et croissante sur $]1,+\infty[$.

4. (a) On a au voisinage de 0, $\arctan(x) \sim x$, et donc $\lim u(x)$ existe et vaut 0.

   (b) On définit les fonctions a et b sur $[1,x]$ par $a(t) = \ln(t)$ et $b(t) = \arctan(t)$.
Elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[1,x]$, donc par théorème d'intégration par parties, on a bien l'égalité voulue.

   (c) Au voisinage de 0, on a $\arctan(x)\ln(x) \sim x\ln(x) \to 0$, et la fonction u étant continue sur le segment $[0,1]$, on a
$$\lim_{x\to 0}\int_1^x u(t)\mathrm{d}t = -\int_0^1 u(t)\mathrm{d}t.$$
Ainsi, par la question 4b, la fonction F admet une limite quand $x \to 0$, qui vaut $\int_0^1 u(t)\mathrm{d}t$.

5. (a) On définit les fonctions a et b sur $[1,x]$ par $a(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$ et $b(t) = \ln(t)$. Elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[1,x]$, et par théorème d'intégration par parties, on a donc
$$I_k(x) = \frac{\ln(x)x^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{k+1}\int_1^x t^k\mathrm{d}t = \frac{\ln(x)x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^{k+1}-1}{(k+1)^2}.$$

   (b) On a facilement pour tous $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2},$$
et on retrouve le résultat voulu.

En multipliant l'égalité précédente par $\ln(t)$, et par linéarité de l'intégrale, on retrouve bien la formule donnant $F(x)$.
On a alors pour tout $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned}
\left| F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k} \right| &= \left| \int_1^x \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2} \mathrm{d}t \right| \\
&= \int_1^x \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2} \mathrm{d}t \quad \text{par positivité de l'intégrale} \\
&\leqslant I_{2n+2}(x)
\end{aligned}$$

par croissance de l'intégrale, avec $\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$.
Quand x tend vers 0, par croissances comparées, on peut prolonger I_k par continuité par $I_k(0) = \frac{1}{(k+1)^2}$, et on retrouve alors le résultat demandé par passage à la limite dans l'inégalité précédente.

(c) Ainsi, la somme proposée est une approximation de $F(0)$ à 10^{-4} près quand $\frac{1}{(2n+3)^2} \leqslant 10^{-4}$), c'est-à-dire pour $n \geqslant 49$.
On propose alors le code

```python
def F0(eps):
    S = 0
    n = 0
    while (1/(2*n+3)**2) > eps:
        S = S + (-1)**n/((2*n+1)**2)
        n = n+1
    return S

```

6. (a) On a $F' = f$, et donc $\lim_{x \to 0} F'(x) = -\infty$.
   (b) D'après 4b, on a pour tout $x > 0$

$$\ln(x) = \frac{F(x) - \int_1^x u(t)\mathrm{d}t}{\arctan(x)}.$$

   Si F était dérivable en 0, alors ln le serait aussi, ce qui n'est pas le cas.

7. (a) On a pour tout $x > 0$

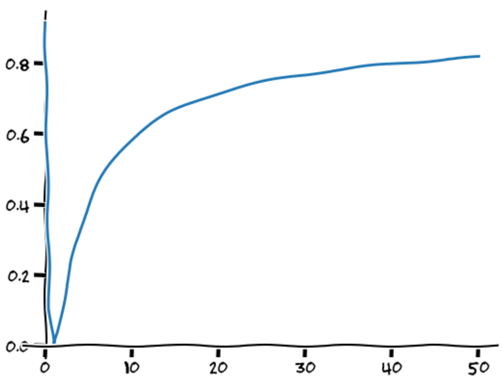
$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} f(t)\mathrm{d}t.$$

   Par changement de variable $u = \frac{1}{t}$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, on a donc

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_1^x f\left(\frac{1}{u}\right) \frac{-1}{u^2} \mathrm{d}u \\
&= F(x)
\end{aligned}$$

   (b) Ainsi, on a $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to 0} F(x) = F(0)$.
   Ainsi, on a une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

8. On peut alors dessiner :



Exercice 2. Des approximations de π

1. (a) On a
$$I_{a,0} = \int_0^1 x^a \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{a+1} x^{a+1}\right]_0^1 = \frac{1}{a+1}.$$

(b) Soient u et v les fonctions définies sur $[0,1]$ par
$$u(t) = \frac{1}{a+1} x^{a+1} \text{ et } v(t) = (1-x)^b.$$
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, et par théorème d'intégration par parties
$$\begin{aligned} I_{a,b} &= \int_0^1 u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\ &= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{b}{a+1}\int_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b-1} \\ &= I_{a+1,b-1} \end{aligned}$$

(c) Montrons-le par récurrence sur b.
- Pour $b=0$, c'est le résultat de la question 1a.
- Supposons le résultat vrai pour un $b \in \mathbb{N}$. Alors
$$\begin{aligned} I_{a,b+1} &= \frac{b+1}{a+1} I_{a+1,b} \\ &= \frac{b+1}{a+1}\frac{(a+1)!b!}{(a+b+2)!} \\ &= \frac{a!(b+1)!}{(a+b+1+1)!} \end{aligned}$$

Par théorème de récurrence, on a bien le résultat souhaité.

2. (a) Posons $\varphi : t \in [0,1] \mapsto g(t) - f(t)$. On a alors
$$\varphi(t) = t^4(1-t)^4\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{2}\right),$$
et comme $t \in [0,1]$, $1+t^2 \leqslant \frac{1}{2}$. La fonction φ est donc positive, et donc $f \leqslant g$.
Posons $\psi : t \in [0,1] \mapsto h - g$. On a alors
$$\psi(t) = t^2(1-t)^2\left(\frac{1}{16} - \frac{t^2(1-t)^2}{1+t^2}\right).$$
L'étude de la fonction entre parenthèse donne bien la positivité de ψ, et donc l'inégalité demandée.

(b) On reconnaît
$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} I_{4,4} = \frac{1}{2}\frac{24^2}{9!} = \frac{1}{1260}.$$
De même,
$$\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{16} I_{2,2} = \frac{1}{16}\frac{4}{120} = \frac{1}{480}.$$

(c) Il est évident que i et $-i$ sont racines de $(1-t)^4+4$. On peut donc factoriser $(1-i)(1+i) = 1+t^2$. On peut donc écrire
$$\begin{aligned} (1-t)^4 + 4 &= (1+t^2)(t^2+at+b) \\ &= (1+b)t^2 + at + b + t^4 + at^3 \\ (1-t)^4 + 4 &= 5 - 4t + 6t^2 - 4t^3 + t^4 \end{aligned}$$
En identifiant les coefficients, on trouve alors $a=-4$ et $b=5$. Finalement
$$(1-t)^4 + 4 = (1+t^2)(t^2-4t+5).$$

(d) On peut alors écrire

$$g(t) = \frac{t^4((1+t^2)(t^2-4t+5)-4)}{1+t^2} = t^4(t^2-4t+5) - \frac{4t^4}{1+t^2}.$$

Calculons alors

$$\int_0^1 (t^4(t^2-4t+5))\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{7}t^7 - \frac{4}{6}t^6 + t^5\right]_0^1 = \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{10}{21}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{4t^4}{1+t^2}\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{4(t^4-1)+4}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{4(t^2-1)(t^2+1)+4}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 4(t^2-1)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{4}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{4}{3}t^3 - 4t\right]_0^1 + [4\arctan(t)]_0^1 \\
&= \frac{4}{3} - 4 + \pi \\
&= -\frac{8}{3} + \pi
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \frac{10}{21} + \frac{8}{3} - \pi = \frac{22}{7} - \pi.$$

(e) On a alors

$$\frac{1}{1260} \leqslant \frac{22}{7} - \pi \leqslant \frac{1}{480}.$$

3. On a a

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}.$$

4. On a donc

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan(a)^2} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

et de la même façon

$$\tan(4a) = \frac{120}{119}.$$

5. On a

$$\tan(4a - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan(4a) - \tan(\frac{\pi}{4})}{1+\tan(4a)\tan(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{239}.$$

6. On a

$$0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{3}},$$

et par croissance stricte de la fonction arctan,

$$0 < a < \frac{\pi}{6}.$$

On a donc $4a - \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}\right[\subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

7. Dans la relation $\tan(4a - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{239}$, on peut alors passer à l'arctangente, pour obtenir

$$4a - \frac{\pi}{4} = b,$$

et on retrouve la formule voulue.

8. (a) On a, au voisinage de 0

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right).$$

(b) On propose alors les fonctions suivantes :

```
def arctanDL(x,n):
  S=0
  for k in range(n):
    S += (-1)**k * x**(2*k+1)/(2*k+1)
  return S

def app_pi(n):
  return 4*(4*arctanDL(1/5,n)-arctanDL(1/239,n))
```