

Devoir libre 3

Angers Le Fresne : BCPST 2

18 Novembre 2024

Exercice 1. Inégalité de Wirtinger

Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et telles que $f(0) = f(1) = 0$:

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1[0, 1] \mid f(0) = 0 = f(1) \right\}.$$

On notera cotan la fonction

$$\text{cotan} : \begin{array}{ccc}]0, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{array}.$$

1. Préliminaires : Inégalité de Cauchy-Schwarz

- (a) Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$. Montrer que $u \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^1 (f(t) + ug(t))^2 dt$ est une fonction polynomiale de degré 2.
- (b) En étudiant le signe de ce trinôme, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_0^1 f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right) \left(\int_0^1 g(t)^2 dt \right).$$

2. Soit $f \in E$.

- (a) Justifier que f admet un développement limité en 0 d'ordre 1, qu'on écrira.
- (b) En déduire que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)f'(t) \cotan(\pi t) = \frac{f'(0)^2}{\pi},$$

puis que la fonction $t \in]0, 1[\mapsto f(t)f'(t) \cotan(\pi t)$ se prolonge par continuité en 0.

On admet qu'elle se prolonge aussi par continuité en 1.

- (c) Montrer de la même façon que la fonction $t \mapsto f(t)^2(1 + \cotan^2(t))$ se prolonge par continuité en 0.
On admet qu'elle se prolonge par continuité en 1.
- (d) On pose pour tout $\varepsilon \in [0, 1[$

$$I_1(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(t)f'(t) \cotan(\pi t) dt \text{ et } I_2(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(t)^2(1 + \cotan^2(\pi t)) dt.$$

Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, $I_1(\varepsilon) = \frac{\pi}{2} I_2(\varepsilon) + r(\varepsilon)$, où r est une fonction définie sur $]0, 1[$ telle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon) = 0$.

Indication : on pourra utiliser une intégration par parties.

- (e) En déduire que

$$I_1(0) = \frac{\pi}{2} I_2(0).$$

3. Soit $f \in E$. On pose

$$A = \int_0^1 f(t)^2 dt \text{ et } B = \int_0^1 f(t)^2 \cotan^2(\pi t) dt.$$

(a) Montrer que $I_1(0)^2 \leq B \int_0^1 f'(t)^2 dt$.

(b) Montrer que $I_2(0)^2 \geq 4AB$.

(c) En déduire l'inégalité de Wirtinger

$$\int_0^1 f'(t)^2 dt \geq \pi^2 \int_0^1 f(t)^2 dt.$$

Exercice 2. Une fonction définie par une intégrale

Dans cet exercice, on étudie la fonction définie par

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_x^{2x} \frac{\arctan(t)}{t} dt \end{array} .$$

On définit aussi la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\arctan(t)}{t} \end{array} .$

1. (a) Justifier que Ψ est bien définie.
- (b) Montrer que la fonction Ψ est impaire.
On pourra faire un changement de variable.
- (c) Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer sa dérivée.
- (d) Établir le tableau de variations de Ψ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On ne calculera pas les limites
- (e) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(2) \arctan(x) \leq \Psi(x) \leq \ln(2) \arctan(2x).$$

2. Étude au voisinage de 0.

- (a) Montrer que Ψ se prolonge par continuité en 0.
On notera toujours Ψ ce prolongement.
- (b) Donner le développement limité de Ψ' en 0, à l'ordre 2.
- (c) En déduire le développement limité de Ψ en 0, à l'ordre 3.
- (d) Le prolongement de Ψ en 0 est-il dérivable en 0?

3. Calculer la limite de Ψ en $+\infty$.

4. Dessiner la courbe représentative de Ψ sur $\mathbb{R}$. On fera apparaître la tangente en 0, et les asymptotes éventuelles.

Exercice 3. Des boules et des urnes

Partie A. Préliminaires

Soit n un entier non nul et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\} = \llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Donner, sans justifications, l'espérance de X .

2. Prouver par récurrence que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. En déduire la variance de X

On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires indiscernables au toucher.

On pose $N = N_1 + N_2$.

On répète l'expérience suivante : on tire au hasard une boule dans l'urne et l'on replace dedans deux boules de la couleur obtenue.

À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc $N + 1$ boules et l'on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne. À l'issue de la deuxième expérience, l'urne contient donc $N + 2$ boules et l'on note X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans l'urne.

Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la k -ième expérience.

Pour tout k non nul, on note B_k l'événement "la boule tirée lors de la k -ième expérience est blanche".

Partie B. Étude d'un cas particulier

On suppose ici que $N_1 = N_2 = 1$.

1. Déterminer la loi de X_1 .

2. Déterminer la loi de X_2 .

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que X_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On pourra faire une récurrence et utiliser le système complet $((X_n = k))_{1 \leq k \leq n+1}$ pour déterminer la loi de X_{n+1} .

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité de B_{n+1} .

On pourra utiliser la question précédente et la formule des probabilités totales.

5. Pour tout entier n non nul, on considère la variable aléatoire $Y_n = \frac{X_n - 1}{n}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de Y_n .

(b) On considère F la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, 1]$. Rappeler, pour tout réel x , la valeur de $F(x)$.

(c) Soit $x \in [0, 1]$.

Prouver que, pour tout entier n , on a $P(Y_n \leq x) = \frac{1}{n+1} \lfloor nx + 1 \rfloor$, où l'on note $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière.

(d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n .

Déduire de ce qui précède, que pour tout réel x , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(x) = F(x)$.

Partie C. Retour au cas général

1. Déterminer la probabilité des événements B_1 et B_2 .

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

(a) Montrer que $\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} kP(X_{n-1} = k) = (N + 1n - 1)P(B_n)$.

(b) Soit $k \in \llbracket N_1, N_1 + n - 1 \rrbracket$.

Déterminez la probabilité de B_{n+1} sachant $B_n \cap (X_{n-1} = k)$ puis la probabilité de B_{n+1} sachant $\overline{B_n} \cap (X_{n-1} = k)$.

(c) En déduire que $P(B_{n+1}) = P(B_n)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente la probabilité de B_n et l'espérance de X_n .