# Devoir libre 3

Angers Le Fresne : BCPST 2

18 Novembre 2024

## Exercice 1. Inégalité de Wirtinger

1. (a) On peut développer dans l'intégrale : pour tout $u \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f(t)+ug(t))^2 \mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(f(t)^2+u^2g(t)^2+2uf(t)g(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= u^2\int_0^1 g(t)^2\mathrm{d}t + 2u\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale}\end{aligned}$$

On retrouve bien un trinôme du second degré.

(b) Par positivité de l'intégrale, il est clair que ce trinôme est toujours positif. Ainsi, son discriminant est nécessairement négatif :

$$4\left(\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 - 4\left(\int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 g(t)^2\mathrm{d}t\right) \leqslant 0,$$

et on retrouve l'inégalité demandée.

2. (a) La fonction $f$ est dérivable en 0, et donc y admet un développement limité d'ordre 1, donné par

$$\forall t \in [0,1],\ f(t) = f(0)+tf'(0)+\mathrm{o}(t) = tf'(0)+\mathrm{o}(t).$$

(b) Au voisinage de 0, on a

$$\operatorname{cotan}(\pi t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\pi t}.$$

On en déduit alors que

$$f(t)\operatorname{cotan}(\pi t) \to \frac{f'(0)}{\pi}.$$

Par continuité de $f'$ en 0, on a aussi $f'(t) \to f'(0)$, et on retrouve la limite demandée.
La fonction proposée admet donc une limite finie en 0, et donc s'y prolonge par continuité.

(c) En réutilisant la limite trouvée précédemment, on trouve

$$\lim_{t\to 0} f(t)^2 + \ f(t)^2\operatorname{cotan}^2(\pi t) \to f(0)^2 + \frac{f'(0)^2}{\pi^2}.$$

La fonction proposée admet donc une limite finie en 0, et donc s'y prolonge par continuité.

(d) Soit $\varepsilon \in ]0,1[$. On définit les fonctions

$$u : \begin{array}{ccc} [\varepsilon, 1-\varepsilon] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{2}f(t)^2 \end{array} \quad \text{et } v : \begin{array}{ccc} [\varepsilon, 1-\varepsilon] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \operatorname{cotan}(\pi t) \end{array}.$$

Les fonction $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment considéré, et pour tout $t$,

$$u'(t) = f(t)f'(t) \text{ et } v'(t) = -\pi - \pi\operatorname{cotan}^2(\pi t).$$

On a donc, par théorème d'intégration par parties

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &= \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\ &= u(1-\varepsilon)v(1-\varepsilon) - u(\varepsilon)v(\varepsilon) - \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}f(1-\varepsilon)^2\operatorname{cotan}(\pi(1-\varepsilon)) - \frac{1}{2}f(\varepsilon)^2\operatorname{cotan}(\pi\varepsilon) + \frac{\pi}{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f(t)^2(1+\operatorname{cotan}^2(\pi t))\mathrm{d}t \\ &= r(\varepsilon) + \frac{\pi}{2}I_2(\varepsilon) \end{aligned}$$

où $r(\varepsilon) = \frac{1}{2} f(1-\varepsilon)^2 \operatorname{cotan}(\pi(1-\varepsilon)) - \frac{1}{2} f(\varepsilon)^2 \operatorname{cotan}(\pi\varepsilon)$.
Or on a vu que quand $\varepsilon \to 0$, $f(\varepsilon)\operatorname{cotan}(\pi\varepsilon) \to \frac{f'(0)}{\pi}$, et donc $f(\varepsilon)^2 \operatorname{cotan}(\pi\varepsilon) \to f(0)\frac{f'(0)}{\pi} = 0$.
De même, quand $\varepsilon \to 0$, $f(1-\varepsilon)\operatorname{cotan}(\pi(1-\varepsilon))$ tend vers une limite réelle, et donc $f(1-\varepsilon)^2\operatorname{cotan}(\pi(1-\varepsilon))$ tend vers 0.
On a bien $\lim_{\varepsilon\to 0} r(\varepsilon) = 0$.

(e) D'après les question 2b et 2c, les intégrales $I_1(0)$ et $I_2(0)$ sont bien définies.
De plus, les fonctions $I_1$ et $I_2$ sont bien continues sur $[0,1[$, et donc $I_1(\varepsilon) \to I_1(0)$ et $I_2(\varepsilon) \to I_2(0)$ quand $\varepsilon \to 0$.
En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on retrouve bien l'inégalité demandée.

3. (a) Appliquons l'inégaÌité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $f'$ et $t \mapsto f(t)\operatorname{cotan}(\pi t)$, qui sont bien continues sur $[0,1]$.

$$\left(\int_0^1 f(t)f'(t)\operatorname{cotan}(\pi t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 f(t)^2\operatorname{cotan}(\pi t)^2\mathrm{d}t\right).$$

On retrouve exactement l'inégalité demandée.

(b) On note que par linéarité de l'intégrale, $I_2(0) = A + B$.
On a donc

$$I_2(0)^2 = A^2 + B^2 + 2AB \geqslant 4AB$$

en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique :

$$A^2 + B^2 = A^2 + B^2 - 2AB + 2AB = (A-B)^2 + 2AB \geqslant 2AB.$$

(c) Si $f$ est la fonction nulle, l'inegalité est claire. Sinon, on a par positivité de l'intégrale et cas de nullité $B > 0$.
On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t &\geqslant \frac{I_1(0)^2}{B} && \text{par la question 3a}\\ &= \frac{\pi^2 I_2(0)}{4B} && \text{par la question 2e}\\ &\geqslant \frac{\pi^2 4AB}{4B} && \text{par la question 3b}\\ &= \pi^2\int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t\end{aligned}$$

## Exercice 2. Une fonction définie par une intégrale

1. (a) La fonction $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $[x, 2x] \subseteq \mathbb{R}_+^*$ ou $[2x, x] \subseteq \mathbb{R}_-^*$. Dans les deux cas, la fonction est continue sur l'intervalle où on l'intègre, et donc la fonction $\Psi$ est bien définie.

(b) Faisons dans $\Psi$ le changement de variable $u = -t$. On a alors $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}\Psi(-x) &= \int_{-x}^{-2x} f(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_x^{2x} f(-u)(-\mathrm{d}u)\\ &= -\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u \quad \text{par parité de } f\\ &= -\Psi(x)\end{aligned}$$

(c) La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle admet donc une primitive sur cet intervalle, soit $F$. On a alors, par théorème fondamental de l'analyse

$$\forall x > 0,\ \Psi(x) = F(2x) - F(x).$$

La fonction $F$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $\Psi$ aussi, et pour tout $x > 0$,

$$\Psi'(x) = 2f(2x) - f(x) = \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x}.$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors

$$\begin{aligned}\Psi'(x) > 0 &\Leftrightarrow \arctan(2x) > \arctan(x)\\ &\Leftrightarrow 2x > x\\ &\Leftrightarrow x > 0\end{aligned}$$

Finalement, la fonction $\Psi$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(e) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout $t \in [x, 2x]$, on a par croissance de la fonction arctan

$$\frac{\arctan(x)}{t} \leqslant f(t) \leqslant \frac{\arctan(2x)}{t}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\arctan(x) \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \Psi(x) \leqslant \arctan(2x) \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Or $\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$, et on retrouve l'inégalité demandée.

2. (a) D'après l'inégalité 1e, on a par théoreme d'encadrement des limites

$$\lim_{x \to 0^+} \Psi(x) = 0.$$

Par imparité, on en déduit que

$$\lim_{x \to 0^-} \Psi(x) = -\lim_{x \to 0^+} \Psi(-x) = 0.$$

La fonction $\Psi$ admet donc une limite finie en 0, et donc peut être prolongée par continuité par $\Psi(0) = 0$.

(b) On connaît le développement limité d'arctan :

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right),$$

et on en déduit celui de $f$ :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right).$$

Enfin, on a donc

$$\Psi'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2 - \frac{8}{3}x^2 - 1 + \frac{1}{3}x^2 + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right) = 1 - \frac{7}{3}x^2 + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right).$$

(c) On peut alors intégrer le développement limité précédent pour obtenir

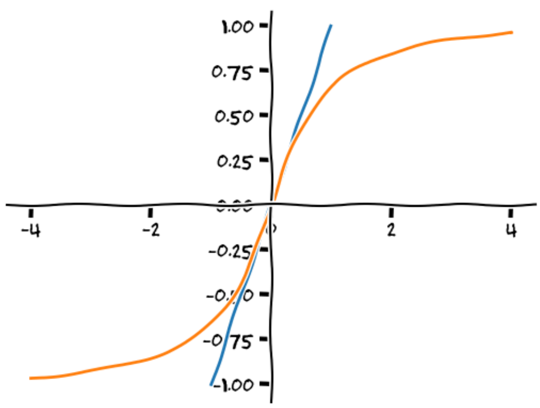
$$\Psi(x) = \Psi(0) + x - \frac{7}{9}x^3 + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right) = x - \frac{7}{9}x^3 + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right).$$

(d) $\Psi$ admet donc un développement limité d'ordre 3 en 0, et donc d'ordre 1. $\Psi$ est donc dérivable en 0.

3. D'après l'inégalité 1e, on a par encadrement des limites

$$\lim_{x \to \infty} \Psi(x) = \frac{\pi \ln(2)}{2}.$$

4. On trace la fonction sur $\mathbb{R}_+$, et on symétrise par rapport à l'origine par imparité. La tangente en 0 a pour équation $y = x$.



# Exercice 3. Des boules et des urnes

**Préliminaires**

1. L'espérance de $X$ est $E(X) = \frac{n+1}{2}$.
2. Soit $P_n$ le propriété à montrer. $P_1$ est évidente, et si $P_n$ est vraie, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

   et on a bien $P_{n+1}$. Par théorème de récurrence, on a bien l'égalité demandée.
3. On a donc, par lemme de transfert

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n}.$$

   Par la formule de Koenig-Huygens, on a alors

$$V(X) = E(X^2) - E(x)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

**Étude d'un cas particulier**

1. L'image de $X_1$ est $\{1,2\}$ : si on a tiré une boule noire, alors $X_1 = 1$ (probabilité $1/2$), et si on a tiré une boule blanche, alors $X_1 = 2$ (probabilité $1/2$).

   $X_1$ suit donc une loi uniforme sur $[\![1,2]\!]$.
2. On note que l'image de $X_2$ est $\{1,2,3\}$. On a alors

$$\begin{aligned}P(X_2=1) &= P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) \\ &= P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

   De la même façon, on trouve $P(X_2=3) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{3}$, et on en déduit $P(X_2=2) = \frac{1}{3}$.

   $X_2$ suit donc une loi uniforme sur $[\![1,3]\!]$.
3. Soit $P_n$ la proposition "$X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(n+1)$". On a déjà montré $P_1$.

   Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons $P_n$. Comme le nombre de boules blanches reste le même ou augmente de 1, l'image de $X_{n+1}$ est $[\![1,n+2]\!]$.

   Soit donc $k \in [\![1,n+2]\!]$. L'ensemble $\{[X_n=\ell] \mid \ell \in [\![1,n+1]\!]\}$ est un système complet d'événements, et donc on a

$$P(X_{n+1}=k) = \sum_{\ell=0}^{n+1} P(X_n=\ell)P_{[X_n=\ell]}(X_{n+1}=k) = \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=1}^{n+1} P_{[X_n=\ell]}(X_{n+1}=k).$$

   On note que dans la somme, la plupart des termes sont nuls :

   - pour $k=1$ : pour avoir une boule blanche après le $n+1$-ième tirage, il faut qu'il y en ait une après le $n$-ième et qu'on ait tiré une boule noire (avec probabilité $\frac{n+1}{n+2}$). On a donc $P_{[X_n=\ell]}(X_{n+1}=k) = 0$ si $\ell > 1$, et donc

$$P(X_{n+1}=1) = \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

- pour $k = n+2$ : de la même façon, on a nécessairement $X_n = n+1$, et donc

$$P(X_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+2}.$$

- pour $k \in [\![2, n+1]\!]$ : on a nécessairement $X_n = k$ ou $X_n = k-1$, et donc toutes les probabilités $P_{[X_n=\ell]}(X_{n+1} = k)$ pour $\ell \neq k, k-1$ sont nulles. On a donc

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1}\left(P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) + P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k)\right).$$

  Dans le premier cas, on a une urne avec $k-1$ boules blanches, et donc $P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2}$.
  Dans le second cas, on a une urne avec $n+2-k$ boules noires, et donc $P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = \frac{n+2-j}{n+2}$.
  Finalement, $P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+2}$.

On a donc bien $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}(n+2)$, et par théoreme de récurrence, on a donc bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(n+1).$$

4. On a par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n+1} P(X_n = k) P_{[X_n=k]}(B_{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} P_{[X_n=k]}(B_{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{n+2} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

5. (a) Il est clair que $Y_n$ suit la loi uniforme sur $\left\{\frac{k}{n} \mid k \in [\![0, n]\!]\right\}$.

   (b) On a

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

   (c) On a

$$\begin{aligned} P(Y_n \leqslant x) &= P(X_n \leqslant nx+1) \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor nx+1 \rfloor} P(X_n = k) \\ &= \frac{\lfloor nx+1 \rfloor}{n+1} \end{aligned}$$

   (d) Si $x < 0$ ou $x > 1$, il est clair que $F_{Y_n}(x) \to F(x)$.
   Soit donc $x \in [0,1]$. Prouvons que $\lfloor nx+1 \rfloor \sim nx$. On a

$$nx < \lfloor nx+1 \rfloor \leqslant nx+1,$$

   et donc

$$1 < \frac{\lfloor nx+1 \rfloor}{nx} \leqslant 1 + \frac{1}{nx}.$$

   Par encadrement des limites, on a bien l'équivalent cherché, et donc la limite voulue.

**Retour au cas général**

1. On a $P(B_1) = \frac{N_1}{N}$, et
$$P(B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{N_1}{N}.$$

2. (a) On note que l'image de $X_{n-1}$ est $[\![N_1, N_1+n-1]\!]$. Par la formule des probabilités totales, on a donc
$$\begin{aligned} P(B_n) &= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(X_{n-1}=k)P_{[X_{n-1}=k]}(B_n) \\ &= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(X_{n-1}=k)\frac{k}{N+n-1} \end{aligned}$$
On retrouve bien le résultat demandé.

   (b) On a
$$P_{B_n\cap[X_{n-1}=k]}(B_{n+1}) = \frac{k+1}{N+n}$$
et
$$P_{\overline{B_n}\cap[X_{n-1}=k]}(B_{n+1}) = \frac{k}{N+n}$$

   (c) On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements
$$\{[X_{n-1}=k]\cap B_n \mid k \in [\![N_1, N_1+n-1\}\cup\{[X_{n-1}=k]\cap\overline{B_n} \mid k\in[\![N_1, N_1+n-1\}.$$
$$\begin{aligned} P(B_n+1) &= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P([X_{n-1}=k]\cap B_n)P_{[X_{n-1}=k]\cap B_n}(B_{n+1}) + P([X_{n-1}=k]\cap\overline{B_n})P_{[X_{n-1}=k]\cap\overline{B_n}}(B_{n+1}) \\ &= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P([X_{n-1}=k]\cap B_n)\frac{k+1}{N+n} + P([X_{n-1}=k]\cap\overline{B_n})\frac{k}{N+n} \\ &= \frac{1}{N+n}\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1}(k+1)P(X_{n-1}=k)P_{[X_{n-1}=k]}(B_n) + kP(X_{n-1}=k)P_{[X_{n-1}=k]}(\overline{B_n}) \\ &= \frac{1}{N+n}\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(X_{n-1}=k)\left(k(P_{[X_{n-1}=k]}(B_n) + P_{[X_{n-1}=k]}(\overline{B_n})) + P_{[X_{n-1}=k]}(B_n)\right) \\ &= \frac{1}{N+n}\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(X_{n-1}=k)\left(k + \frac{k}{N+n-1}\right) \\ &= \frac{1}{N+n}\left(1+\frac{1}{N+n-1}\right)\frac{1}{N+n}\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} kP(X_{n-1}=k) \\ &= P(B_n) \end{aligned}$$

3. On a donc bien pour tout $n$, $P(B_n) = \frac{N_1}{N}$. L'espérance de $X_n$ est donnée par
$$E(X_n) = (N+n)P(B_{n+1}) = \frac{(N+n)N_1}{N}.$$