PARTIE 2

Des éléments de syntaxe `Python`, et en particulier l'usage du module `numpy`, sont donnés en annexe à la fin de la partie 2. Dans tout ce qui suit, les variables n, p, A, M, i, j et c vérifient les conditions suivantes qui ne seront pas rappelées à chaque question :

— n et p sont des entiers naturels tels que $p \geq n \geq 2$;
— A est une matrice carrée à n lignes inversible ;
— M est une matrice à n lignes et p colonnes telle que la sous-matrice carrée constituée des n premières colonnes de M est inversible ;
— i et j sont des entiers tels que $0 \leq i \leq n-1$ et $0 \leq j \leq n-1$;
— c est un réel non nul.

On note $L_i \leftarrow L_i + cL_j$ l'opération qui ajoute à la ligne i d'une matrice la ligne j multipliée par c.

1. Soit la fonction `initialisation` :

```
def initialisation(A):
    n = np.shape(A)[0]
    mat = np.zeros((n,2*n))
    for i in range(0, n):
        for j in range(0, n):
            mat[i,j] = A[i,j]
    return(mat)
```

   Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant. L'appel `initialisation(A)` renvoie :

   (a) une matrice rectangulaire à n lignes et $2n$ colonnes remplie de zéros ;

   (b) une matrice de même taille que A ;

   (c) une erreur au niveau d'un `range` ;

   (d) une matrice rectangulaire telle que les n premières colonnes correspondent aux n colonnes de A, et les autres colonnes sont nulles.

2. Les trois fonctions `multip`, `ajout` et `permut` suivantes ne renvoient rien : elles *modifient* les matrices auxquelles elles s'appliquent.

   (a) Que réalise la fonction `multip` ?

```
def multip(M, i, c):
    p = np.shape(M)[1]
    for k in range(0, p):
        M[i,k] = c*M[i,k]
```

   (b) Compléter la fonction `ajout`, afin qu'elle effectue l'opération $L_i \leftarrow L_i + cL_j$.

```
def ajout(M, i, j, c):
    p = np.shape(M)[1]
    for k in range(0, p):
        _____ ligne(s) à compléter _____
```

   (c) Écrire une fonction `permut` prenant pour argument M, i et j, et qui modifie M en échangeant les valeurs des lignes i et j.

   Dans la suite du sujet, l'expression "opération élémentaire sur les lignes" fera référence à l'utilisation de `permut`, `multip` ou `ajout`.

3. Soit la colonne numéro j dans la matrice M. On cherche le numéro r d'une ligne où est situé le plus grand coefficient (en valeur absolue) de cette colonne parmi les lignes j à $n-1$. Autrement dit, r vérifie :

$$|A[r,j]| = \max\{|A[i,j]| \text{ pour } i \text{ tel que } j \leq i \leq n-1\}.$$

Écrire une fonction `rang_pivot` prenant pour argument M et j, et qui renvoie cette valeur de r. Lorsqu'il y a plusieurs réponses possibles pour r, dire (avec justification) si l'algorithme renvoie le plus petit r, le plus grand r ou un autre choix. *(L'utilisation d'une commande `max` déjà programmée dans `Python` est bien sûr proscrite.)*

4. Soit la fonction `mystere` :

```
def mystere(M):
    n = np.shape(M)[0]
    for j in range(0, n):
        r = rang_pivot(M, j)
        permut(M, r, j)
        for k in range(j+1, n):
            ajout(M, k, j, -M[k,j]/M[j,j])
        print(M)
```

(a) On considère dans cette question l'algorithme `mystere` appliqué à la matrice $M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$: indiquer combien de fois la ligne `print(M)` est exécutée ainsi que les différentes valeurs qu'elle affiche.

(b) De façon générale, que réalise cet algorithme ?

5. Soit la fonction `reduire`, qui modifie M :

```
def reduire(M):
    n = np.shape(M)[0]
    mystere(M)
    for i in range(0, n):
        multip(M, i, 1/M[i,i])
    #Les lignes suivantes sont à compléter :
    --------------------------
```

(a) Compléter la fonction afin que la portion de code manquante effectue les opérations élémentaires suivantes sur les lignes :

```
pour j prenant les valeurs n-1, n-2, ..., 1, faire :
    pour k prenant les valeurs j-1, j-2, ..., 0, faire :
        L_k ← L_k − M[k, j]L_j
```

(b) Indiquer ce que réalise cette fonction.

6. Inversion de A.

(a) Écrire une fonction `augmenter` prenant pour argument A et qui renvoie la matrice de taille $(n, 2n)$ définie ainsi :

— dans la partie gauche (composée des n lignes et n premières colonnes), elle contient les coefficients de A ;

— dans la partie droite (composée des n lignes et n dernières colonnes), elle contient les coefficients de la matrice identité de taille n.

Par exemple,

$$\text{pour } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ la fonction renvoie } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) À l'aide des fonctions précédentes, proposer un raisonnement permettant d'inverser A.

(c) Écrire une fonction `inverser` prenant pour argument A et qui renvoie la matrice inverse de A, en suivant le raisonnement décrit en question 6b.

(d) Quelle méthode connue venez-vous d'implémenter ?

Annexe : Rappels Python pour la partie 2

On considère que le module `numpy`, permettant de manipuler des tableaux à deux dimensions, est importé via `import numpy as np`. Pour une matrice M à n lignes et p colonnes, les indices vont de 0 à $n-1$ pour les lignes et de 0 à $p-1$ pour les colonnes.

Python	**Interprétation**
`abs(x)`	Valeur absolue du nombre x
`M[i,j]`	Coefficient d'indice (i, j) de la matrice M
`np.zeros((n,p))`	Matrice à n lignes et p colonnes remplie de zéros

`T = np.shape(M)`
`T[0]` ou `np.shape(M)[0]`
`T[1]` ou `np.shape(M)[1]`
	Dimensions de la matrice M
	Nombre de lignes
	Nombre de colonnes

`M[a:b,c:d]`	Matrice extraite de M constituée des lignes a à $b-1$ et des colonnes c à $d-1$: si a (resp. c) n'est pas précisé, l'extraction commence à la première ligne (resp. colonne) si b (resp. d) n'est pas précisé, l'extraction finit à la dernière ligne (resp. colonne) incluse

Banque <<Agro -Véto>>
A - 0513

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE B

Durée : 3 heures 30 minutes

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans tout ce problème, pour a et b deux entiers naturels tels que $a \leqslant b$, on notera $[\![a, b]\!]$ l'ensemble de tous les entiers naturels n tels que $a \leqslant n \leqslant b$. Par exemple, $[\![0, 3]\!]$ désigne l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. Pour une variable aléatoire réelle X, on notera $E(X)$ son espérance lorsqu'elle en possède une. Pour deux événements A et B d'un même espace probabilisé, on notera $P(A)$ et $P(A|B)$ respectivement la probabilité de A et la probabilité conditionnelle de A sachant B (si $P(B) \neq 0$).

Le but de ce problème est de définir et d'utiliser dans des cas simples la notion d'espérance conditionnelle, dont la définition dans le cas de variables discrètes est donnée ci dessous et servira dans les parties A, B et C. La notion d'espérance conditionnelle dans le cas de deux variables à densité est définie et utilisée dans la partie D. **Les parties A, B, C et D sont indépendantes**.

Pour n et p deux entiers naturels non nuls, soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs respectivement dans $[\![0, n]\!]$ et $[\![0, p]\!]$. On suppose que, pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, $P(Y = i) \neq 0$. On appelle *espérance conditionnelle de X sachant $Y = i$* la quantité

$$E(X|Y = i) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k|Y = i).$$

Question préliminaire

0. Avec les notations de la définition ci-dessus, montrer à l'aide de la formule des probabilités totales, la relation suivante

$$E(X) = \sum_{i=0}^{p} E(X|Y = i)P(Y = i). \qquad (*)$$

Cette relation, connue sous le nom de *formule de l'espérance totale*, sera utilisée dans les parties A, B et C de ce problème. Nous y ferons référence sous le nom $(*)$.

A. Étude d'un premier exemple

A.I. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![0, 3]\!]$. On note M la variable aléatoire dont la valeur est égale au maximum de la valeur de U et de la valeur de V, soit $M = \max(U, V)$.

1) Donner la loi conjointe du couple (U, V).

2) Représenter dans un tableau la loi conjointe du couple (U, M). En déduire la loi marginale et l'espérance de M.

A.II. Le but de cette question est de généraliser le résultat de la question **A.I**. Soit n un entier naturel non nul. U et V désignent désormais deux variables aléatoires réelles discrètes, indépendantes, de même loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. On note alors $M = \max(U, V)$ la variable aléatoire égale à la valeur maximale prise par U et V.

1) Calculer la valeur de $\sum\limits_{k=i+1}^{n} k$, pour un entier naturel $i < n$.

2) Montrer que $\sum\limits_{i=0}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) Montrer que $E(M|U = n) = n$.

4) On considère i un entier naturel tel que $i < n$.

a) Montrer que $E(M|U = i) = iP(M = i|U = i) + \displaystyle\sum_{k=i+1}^{n} kP(M = k|U = i)$.

b) Montrer que pour $k \in [\![i+1, n]\!]$, $P(M = k|U = i) = \dfrac{1}{n+1}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=i+1}^{n} kP(M = k|U = i)$ en fonction de i et n

c) Que vaut $P(M = i|U = i)$?

5) Calculer $E(M)$ en fonction de n à l'aide de la relation $(*)$. Ce résultat est-il cohérent avec celui obtenu dans la question **A.I** ?

B. Etude d'un second exemple

Étant donné b un entier naturel non nul, on considère une urne contenant b boules blanches. Les autres boules, au nombre de c, sont noires. L'urne contient ainsi $N = b + c$ boules. On tire les boules une à une et sans remise. On s'intéresse au nombre Y_N de boules noires tirées avant d'obtenir la première blanche (l'indice N marque la dépendance de Y par rapport au nombre total de boules dans l'urne avant le premier tirage). On pose $u_N = E(Y_N)$ et on raisonne par récurrence sur N pour une valeur de b fixée. X_1 désigne la variable de Bernoulli égale à 1 si la première boule tirée est blanche et 0 sinon.

1) Quelles sont les valeurs possibles de Y_N ?

2) Que vaut $E(Y_N|X_1 = 1)$?

3) Justifier, pour $i \in [\![1, c]\!]$, l'égalité $P(Y_N = i|X_1 = 0) = P(Y_{N-1} = i - 1)$.

4) En déduire que $E(Y_N|X_1 = 0) = 1 + u_{N-1}$.

5) Déduire de la relation $(*)$ que pour $N > b$, on a $u_N = (1 + u_{N-1})\dfrac{N-b}{N}$.

6) Que vaut u_b ? Déterminer u_{b+1}, u_{b+2} à l'aide de la question précédente.

7) Donner $E(Y_{b+k})$ pour tout k entier naturel.

C. Etude d'un troisième exemple

On s'intéresse maintenant au problème suivant. Pour un examen, une liste de N questions a été fournie aux étudiants pour leurs révisions. Le jour de l'examen, n questions de la liste, choisies aléatoirement, sont posées sous forme de questionnaire à choix multiple (QCM), avec quatre réponses possibles à chaque fois dont une seule est juste. Chaque réponse juste rapporte un point, les réponses fausses rapportent zéro point. Les questions sont indépendantes entre elles.

On s'intéresse ici à un étudiant donné, qui a révisé et connaît la réponse à b questions de la liste. Le jour de l'examen, il se retrouve donc face à n questions, chacune de l'un ou l'autre des deux types suivants :

i) celles qui sont parmi les b qu'il a révisées et dont il connaît la réponse ; on note C la variable aléatoire égale au nombre de ces questions ;

ii) celles qu'il n'a pas révisées, auxquelles il donne une réponse au hasard parmi les quatre fournies (« au hasard » signifiant ici qu'il possède une chance sur quatre de donner la bonne réponse) ; on note D le nombre de ces questions auxquelles l'étudiant répond correctement.

On supposera dans la suite que $1 \leqslant n \leqslant b$ et $n \leqslant N - b$. On note Y le nombre total de points obtenus par l'étudiant à son examen. Le but est le calcul de l'espérance de Y.

1) Quelle est la loi suivie par C ? En déduire que $E(C) = \dfrac{nb}{N}$.

2) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de D sachant $[C = k]$. En déduire $E(D|C = k)$.

3) Calculer $E(D)$ à l'aide de la relation $(*)$, puis $E(Y)$.

D. Cas de lois continues

On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles ayant une densité conjointe $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et si g est une densité de Y, alors une densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ ($y \in \mathbb{R}$ étant fixé) est donnée par

$$g_y : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{g(y)} & \text{si } g(y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle *espérance conditionnelle de X sachant* $Y = y$ la quantité

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x g_y(x) \mathrm{d}x.$$

On admettra que cette quantité existe bien dès lors que X et Y possèdent une espérance et que X admet une densité conditionnelle sachant $Y = y$ pour tout y.

On donne dans cette partie un exemple de calcul utilisant cette notion. On rappelle qu'une variable aléatoire à densité X suit la loi exponentielle de paramètre λ si et seulement si une de ses densités est la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda : x \mapsto \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Pour une opération de maintenance informatique, deux techniciens travaillent simultanément. La durée de l'intervention du premier technicien (respectivement du second) est une variable aléatoire X_1 (resp. X_2) qui suit la loi exponentielle de paramètre $1/2$ (resp. $1/3$), l'unité de temps (qui ne sera pas écrite) étant l'heure. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes. On cherche dans la suite à déterminer des informations sur la durée totale de l'opération de maintenance, qui est donc égale à $Y = \max(X_1, X_2)$. On pose aussi $Z = \min(X_1, X_2)$.

D.I. On cherche d'abord à déterminer simplement l'espérance de Y.

1) Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Calculer $E(X)$.

2) Pour $t \in \mathbb{R}$, déterminer $P(Z > t)$. En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera l'espérance.

3) Donner l'espérance de Y (remarquer qu'il existe une relation simple entre $X_1 + X_2$ et $Y + Z$).

D.II. On cherche maintenant à déterminer la loi du couple (Y, Z). On notera dans la suite F_1 et F_2 les fonctions de répartition de X_1 et X_2 respectivement.

1) Donner la fonction de répartition de Y en fonction de F_1 et F_2.

2) Pour $(y, z) \in \mathbb{R}^2$, donner $P([Y \leqslant y] \cap [Z > z])$ en fonction de F_1 et F_2 (on distinguera les cas $y \leqslant z$ et $y > z$). Y et Z sont-elles indépendantes ?

3) Soit F la fonction définie par $F(y, z) = P([Y \leqslant y] \cap [Z \leqslant z])$. On admettra qu'une densité du couple (Y, Z) est donnée par $f(y, z) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}$ aux points (y, z) où cette dérivée partielle existe, et $f(y, z) = 0$ sinon. En déduire qu'une densité du couple (Y, Z) est donnée par

$$f : (y, z) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}-\frac{z}{3}} + \mathrm{e}^{-\frac{y}{3}-\frac{z}{2}}}{6} & \text{si } 0 < z < y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4) Pour $z \in \mathbb{R}_+$, déterminer la densité conditionnelle de Y sachant $Z = z$ puis $E(Y|Z = z)$.

En déduire que $E(Y|Z = z) = \dfrac{1}{5}(13 + 5z)$

5) Le technicien le plus rapide (on ne sait pas si c'est le premier ou le deuxième) finit son travail en une heure. Il reste un temps aléatoire à attendre que l'autre technicien termine. Quelle est la valeur moyenne de ce temps ?

FIN DE L' ÉPREUVE