# Devoir libre 4

Angers Le Fresne : BCPST 2

## Agro B 2011

**Question préliminaire** Par la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $\{[Y = i] \mid i \in [\![0, p]\!]\}$, on a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ :

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{i=0}^{p} \mathbb{P}_{[Y=i]}(X = k)\mathbb{P}(Y = i).$$

On a alors, par définition d'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \sum_{i=0}^{p} \mathbb{P}_{[Y=i]}(X = k)\mathbb{P}(Y = i) \\
&= \sum_{i=0}^{p} \mathbb{P}(Y = i) \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}_{[Y=i]}(X = k) \\
&= \sum_{i=0}^{p} \mathbb{E}_{[Y=i]}(X = k)\mathbb{P}(Y = i)
\end{aligned}$$

**A. I. 1.** On a pour tous $i, j \in [\![0, 3]\!]$, $\mathbb{P}((U, V) = (i, j)) = \frac{1}{16}$.

**2.** On a les probabilités $\mathbb{P}((U, M) = (k, m))$ suivantes

| $m \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{16}$ | 0 | 0 | 0 |
| 1 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | 0 | 0 |
| 2 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | 0 |
| 3 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{4}{16}$ |

On a alors la loi marginale de $M$ :

$$\mathbb{P}(M = 0) = \frac{1}{16},\ \mathbb{P}(M = 1) = \frac{3}{16},\ \mathbb{P}(M = 2) = \frac{5}{16} \text{ et } \mathbb{P}(M = 3) = \frac{7}{16}.$$

On en déduit l'espérance de $M$ : $\mathbb{E}(M) = \frac{17}{8}$.

**II. 1.** Notons $S(i, n)$ la somme recherchée. Alors par le changement d'indice $\ell = n - k + i + 1$, on a

$$S(i, n) = \sum_{\ell=i+1}^{n} n - \ell + i + 1 > .$$

On a alors

$$\begin{aligned}
2S(i, n) &= \sum_{k=i+1}^{n} k + \sum_{k=i+1}^{n} n - k + i + 1 \\
&= \sum_{k=i+1}^{n} n + i + 1 \\
&= (n - i)(n + i + 1)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{k=i+1}^{n} k = \frac{1}{2}(n - i)(n + i + 1).$$

**2.** Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P_n$ : « $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ».

- La propriété $P_0$ est évidente.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $P_n$. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \quad \text{par } P_n\\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)\end{aligned}$$

  On a donc $P_{n+1}$.

Par théorème de récurrence, on a donc bien l'égalité demandée.

**3.** On a par définition

$$\mathbb{E}_{[U=n]}(M) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}_{[U=n]}(M=k).$$

Or on a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

$$\mathbb{P}_{[U=n]}(M=k) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } k=n \\ 0 & \text{sinon}\end{array}\right. .$$

On a donc

$$\mathbb{E}_{[U=n]}(M) = n.$$

**4.** **a.** On note que si $U = i$, alors $M \geqslant i$ presque sûrement ; en particulier, pour tout $k < i$, $\mathbb{P}_{[U=i]}(M=k) = 0$.
On a donc

$$\mathbb{E}_{[U=i]}(M) = \sum_{k=i}^{n} k\mathbb{P}_{[U=i]}(M=k) = i\mathbb{P}_{[U=i]}(M=i) + \sum_{k=i+1}^{n} k\mathbb{P}_{[U=i]}(M=k).$$

**b.** Pour $k > i$, sachant $U = i$, $[M = k] = [V = k]$, et donc

$$\mathbb{P}_{[U=i]}(M=k) = \mathbb{P}_{[U=i]}(V=k) = \frac{1}{n+1}$$

par indépendance de $U$ et $V$.
On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=i+1}^{n} k\mathbb{P}_{[U=i]}(M=k) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=i+1}^{n} k\\ &= \frac{(n-i)(n+i+1)}{2(n+1)}\end{aligned}$$

**c.** Sachant $U = i$, on a $[M = i] = [V \leqslant i]$. On a donc

$$\mathbb{P}_{[U=i]}(M=i) = \mathbb{P}_{[U=i]}(V \leqslant i) = \frac{i+1}{n+1}$$

par indépendance de $U$ et $V$.

**5.** On a donc pour tout $i < n$ :

$$\mathbb{E}_{[U=i]}(M) = i\frac{i+1}{n+1} + \frac{(n-i)(n+i+1)}{2(n+1)} = \frac{n(n+1)+i(i+1)}{2(n+1)}.$$

On note que cette relation reste vraie pour $i = n$.
On a alors, par la relation $(*)$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}_{[U=i]}(M)\mathbb{P}(U=i)\\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{n(n+1)+i(i+1)}{2(n+1)^2}\\ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n} i + \frac{1}{2(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n} i^2\\ &= \frac{n}{2} + \frac{n(2n+1)}{12(n+1)} + \frac{n}{4(n+1)}\\ &= \frac{n(4n+5)}{6(n+1)}\end{aligned}$$

En prenant $n = 3$, on retrouve bien le résultat de la partie **A.I.**

**B.** 1) Les valeurs possibles pour $Y_N$ sont toutes les valeurs de $[\![0, c]\!]$.

2) La loi conditionnelle de $Y_N$ sachant $X_1 = 1$ est une loi certaine, égale à 0. Ainsi, on a $\mathbb{E}_{[X_1=1]}(Y_N) = 0$.

3) Sachant qu'on a tiré une boule noire au premier tirage, la probabilité de tirer $i$ boules noires avant la première blanche est la même que celle de tirer $i-1$ boules noires avant la première blanche, dans une urne à $N-1$ boules, après avoir tiré la première.

On a donc bien l'égalité demandée.

4) On a alors, en notant que $\mathbb{P}_{[X_1=0]}(Y_N = 0) = 0$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{[X_1=0]}(Y_N) &= \sum_{i=1}^{c} i\mathbb{P}_{[X_1=0]}(Y_N = i) \\
&= \sum_{i=1}^{c} i\mathbb{P}(Y_{N-1} = i-1) \\
&= \sum_{i=0}^{c-1} (i+1)\mathbb{P}(Y_{N-1} = i) \\
&= 1 + \mathbb{E}(Y_{N-1}) \\
&= 1 + u_{N-1}
\end{aligned}$$

5) On a par $(*)$ :

$$\begin{aligned}
u_N &= \mathbb{E}(Y_N) \\
&= \mathbb{E}_{[X_1=0]}(Y_N)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{E}_{[X_1=1]}(Y_N)\mathbb{P}(X_1 = 1) \\
&= (1 + u_{N-1})\frac{c}{N} + 0 \\
&= (1 + u_{N-1})\frac{N-b}{N}
\end{aligned}$$

6) Si $N = b$, alors l'urne ne contient que des boules blanches ; $Y_b$ suit alors une loi certaine égale à 0, et donc $u_b = 0$.

On a alors

$$\begin{aligned}
u_{b+1} &= (1 + u_b)\frac{b+1-b}{b+1} = \frac{1}{b+1} \\
u_{b+2} &= (1 + u_{b+1})\frac{b+2-b}{b+2} = \frac{2}{b+1}
\end{aligned}$$

7) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété $P_n$ : « $\mathbb{E}(Y_{b+k}) = \frac{k}{b+1}$ ».

- On a vu $P_0$ dans la question **B**.6).
- Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $P_k$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{b+k+1}) &= (1 + \mathbb{E}(Y_k))\frac{b+k+1-b}{b+k+1} \\
&= \frac{b+k+1}{b+1}\frac{k+1}{b+k+1} \quad \text{par } P_n \\
&= \frac{k+1}{b+1}
\end{aligned}$$

  On a donc $P_{n+1}$.

Par théorème de récurrence, on a alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(Y_{b+k}) = \frac{k}{b+1}.$$

**C.** 1) La variable $C$ suit une loi hypergéométrique de paramètres $N$, $n$ et $\frac{b}{N}$. Ainsi, on a $\mathbb{E}(C) = \frac{nb}{N}$.

2) Sachant $C = k$, la variable $D$ peut prendre les valeurs de $[\![0, n-k]\!]$. On a alors répétition de $n-k$ épreuves de Bernoulli (répondre correctement à une question donnée) identiques et indépendantes.

Ainsi, sachant $C = k$, la variable $D$ suit une loi binomiale de paramètres $n-k$ et $\frac{1}{4}$ ; on a alors $\mathbb{E}_{[C=k]}(D) = \frac{n-k}{4}$.

3) On a alors, par $(*)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(D) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}_{[C=k]}(D)\mathbb{P}(C=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{4}\mathbb{P}(C=k) \\
&= \frac{n}{4}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(C=k) - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(C=k) \\
&= \frac{n}{4} - \frac{1}{4}\mathbb{E}(C) \\
&= \frac{n(N-b)}{4N}
\end{aligned}$$

On a alors, comme $Y = C + D$, par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(C) + \mathbb{E}(D) = \frac{nb}{N} + \frac{n(N-b)}{4N} = \frac{n(3b+N)}{4N}.$$

**D.** **I.** **1.** On a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

**2.** On note que $X_1$ et $X_2$ sont presque sûrement positives, et donc $Z$ aussi. Ainsi, si $t \leqslant 0$, on $\mathbb{P}(Z > t) = 1$. Soit alors $t > 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z > t) &= \mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > t) \\
&= \mathbb{P}([X_1 > t] \cap [X_2 > t]) \\
&= \mathbb{P}(X_1 > t)\mathbb{P}(X_2 > t) \quad \text{par indépendance} \\
&= e^{-\frac{t}{2}}e^{-\frac{t}{3}} \\
&= e^{-\frac{5t}{6}}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(Z \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\frac{5t}{6}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a alors $Z \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{5}{6}\right)$.

**3.** On note que $X_1 + X_2 = Y + Z$, et donc par linéarité

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(Z) = 2 + 3 - \frac{6}{5} = \frac{19}{5}.$$

**II.** **1.** On a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leqslant t) &= \mathbb{P}(\max(X_1, X_2) \leqslant t) \\
&= \mathbb{P}([X_1 \leqslant t] \cap [X_2 \leqslant t]) \\
&= F_1(t)F_2(t) \quad \text{par indépendance}
\end{aligned}$$

**2.** Il est clair que $Y > Z$ presque sûrement, et donc si $z \geqslant y$,

$$\mathbb{P}([Y \leqslant y] \cap [Z > z]) = 0.$$

Soient donc $y > z$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y \leqslant y] \cap [Z > z]) &= \mathbb{P}([X_1 \leqslant y] \cap [X_2 \leqslant y] \cap [X_1 > z] \cap [X_2 > z]) \\
&= \mathbb{P}([z < X_1 \leqslant y] \cap [z < X_2 \leqslant y]) \\
&= \mathbb{P}(z < X_1 \leqslant y)\mathbb{P}(z < X_2 \leqslant y) \quad \text{par indépendance} \\
&= (F_1(y) - F_1(z))(F_2(y) - F_2(z))
\end{aligned}$$

Si $z \geqslant y$,

$$\mathbb{P}([Y \leqslant y] \cap [Z > z]) = 0,$$

mais si $y \geqslant 0$, aucune des probabilités $\mathbb{P}(Y \leqslant y)$ et $\mathbb{P}(Z > z)$ n'est nulle.
Les variables $Y$ et $Z$ ne sont donc pas indépendantes.

**3.** Soient $y, z \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} F(y,z) &= \mathbb{P}([Y \leqslant y] \cap [Z \leqslant z]) \\ &= \mathbb{P}(Y \leqslant y) - \mathbb{P}([Y \leqslant y] \cap [Z > z]) \end{aligned}$$

par la formule des probabilités totales.
Ainsi,

$$F(y,z) = \begin{cases} F_1(y)F_2(y) & \text{si } y \leqslant z \\ F_1(z)F_2(y) + F_1(y)F_2(z) - F_1(z)F_2(z) & \text{si } y > z \end{cases}.$$

En dérivant par rapport à $y$, puis $x$, on a alors

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}(y,z) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant z \\ f_{\frac{1}{2}}(z)f_{\frac{1}{3}}(y) + f_{\frac{1}{2}}(y)f_{\frac{1}{3}}(z) & \text{sinon} \end{cases},$$

et on retrouve le résultat demandé.

**4.** Notons $g$ la densité conditionnelle de $Y$ sachant $Z = z$, $z \in \mathbb{R}_+$.
On a alors $f_Z = f_{\frac{5}{6}}$ ne s'annule pas, donc pour tout $y \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{f(y,z)}{f_{\frac{5}{6}}(z)} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant z \\ \dfrac{e^{-\frac{y}{2}-\frac{z}{3}} + e^{-\frac{y}{3}-\frac{z}{2}}}{6}\dfrac{6}{5}e^{\frac{5}{6}z} & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} O & \text{si } y \leqslant z \\ \dfrac{e^{\frac{1}{2}(z-y)} + e^{\frac{1}{3}(z-y)}}{5} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{[Z=z]}(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} yg(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_z^{\infty} y\frac{e^{\frac{1}{2}(z-y)} + e^{\frac{1}{3}(z-y)}}{5}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{5}e^{\frac{1}{2}z}\int_z^{\infty} ye^{-\frac{1}{2}y}\mathrm{d}y + \frac{1}{5}e^{\frac{1}{3}z}\int_z^{\infty} ye^{-\frac{1}{3}y}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{5}e^{\frac{1}{2}z}2e^{-\frac{z}{2}}(z+2) + \frac{1}{5}e^{\frac{1}{3}z}3e^{-\frac{z}{3}}(z+3) \quad \text{par intégrations par parties} \\ &= \frac{1}{5}(13+5z) \end{aligned}$$

**5.** Le technicien le plus rapide met le temps $Z$ pour son intervention. Sachant que $Z = 1$, le temps moyen mis par le technicien le plus lent est donc $\mathbb{E}_{[Z=1]}(Y) = \frac{18}{5}$.
Il restera donc en moyenne $\frac{13}{5}$ heures à attendre, soit deux heures et trente-six minutes.

# Modélisation 2019, info

**1.**
- **a.** Faux : les $n$ premières colonnes de `mat` sont remplies avec les coefficients de $A$, qui ne sont pas nuls puisque $A$ est supposée inversible.
- **b.** Faux : la matrice a $n$ lignes et $2n$ colonnes, alors que $A$ est carrée à $n$ lignes.
- **c.** Faux : il n'y a pas d'erreur
- **d.** Vrai : la matrice contient initialement des 0, et ses $n$ premières colonnes sont remplies avec les coefficients de $A$ à l'aide des boucles `for`.

**2.**
- **a.** La fonction `multip` prend en paramètre une matrice $M$, un indice de ligne $i$ et un réel $c$, et renvoie la matrice $M$ où la $i$-ième ligne a été multipliée par $c$.
- **b.** On propose :

```python
def ajout(M,i,j,c):
    p = np.shape(M)[1]
    for k in range(0,p):
        M[i,k] += c*M[j,k]

```

**c.** On propose :

```python
def permut(M,i,j):
    p = np.shape(M)[1]
    for k in range(p):
        M[i,k],M[j,k] = M[j,k],M[i,k]
```

**3.** On propose, en supposant que $j < n$ :

```python
1 def rang_pivot(M,j):
2     r = 0
3     m = abs(M[0,j])
4     n = np.shape(M)[0]
5     for i in range(n):
6         if abs(M[i,j]) > m:
7             m = abs(M[i,j])
8             r = i
9     return r
10
```

Dans le cas où plusieurs valeurs de $r$ conviennent, l'inégalité stricte ligne 6 ne met pas à jour si on rencontre la même valeur : l'algorithme renvoie donc le plus petit $r$ qui convient.

**4.** **a.** La fonction `print` est appelée autant de fois que le nombre de lignes de la matrice passée en paramètre.
Dans le cas de $M_1$, elle est donc exécutée trois fois.
Elle affichera, dans l'ordre

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

**b.** Cet algorithme permet d'échelonner la matrice par la méthode de Gauss :

- on cherche le plus grand pivot, qu'on place en première ligne
- on annule les coefficients des autres lignes dans la première colonne grâce au pivot
- on itère en "oubliant" la première ligne et la première colonne de la matrice.

**5.** **a.** On propose

```python
def reduire(M):
    n = np.shape(M)[0]
    mystere(M)
    for i in range(0,n):
        multip(M,i,1/M[i,i])
    for j in range(n-1,0,-1):
        for k in range(j-1,-1,-1):
            ajout(M,k,j,-M[k,j])
```

**b.** Cette fonction commence par modifier les lignes pour avoir des coefficients diagonaux égaux à 1, puis continue d'appliquer le pivot de Gauss en partant de la dernière ligne pour supprimer "en remontant" les coefficients non diagonaux.

**6.** **a.** On réutilise la fonction `initialisation` :

```python
def augmenter(A):
    n = np.shape(A)[0]
    mat = initialisation(A)
    mat[:,n:] = np.eye(n)
    return mat
```

**b.** On peut alors inverser la matrice $A$ en créant la matrice contenant $A$ d'un côté, la matrice identité de l'autre, et en réduisant cette matrice pour avoir l'identité à gauche. Il suffit alors de récupérer la matrice dans la partie droite.

```python
def inverser(A):
    mat = augmenter(A)
    reduire(mat)
    return mat[:,n:]
```

**c.** On vient alors d'implémenter la méthode du pivot de Gauss, ou méthode miroir, pour inverser une matrice.