

Devoir surveillé 5

Angers Le France : BCPST 2

30 janvier 2021 : 8h – 10h30

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

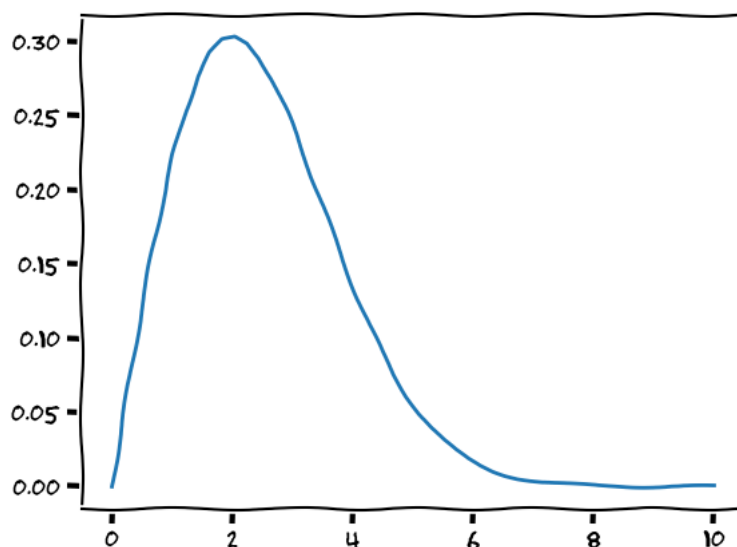
Exercice

1. La fonction f étant nulle sur $\mathbb{R}_-$, on va seulement l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$. On note qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^1$, et que pour tout $t > 0$,

$$f'(t) = \frac{1}{c^2} e^{-\frac{t^2}{2c^2}} \left(1 - \frac{t^2}{c^2} \right).$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0, c[$ et strictement décroissante sur $]c, +\infty[$. Elle admet donc un maximum en c , qui vaut $\frac{1}{c\sqrt{e}}$.

Par croissance comparée, lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction f tend vers 0. On a alors une courbe de la forme



2. La fonction f est bien positive, et continue sauf peut-être en 0. Son intégrale converge sur $\mathbb{R}_-$; étudions donc cette intégrale sur $\mathbb{R}_+$.

En 0, la fonction est prolongeable par continuité, et donc son intégrale y converge. Soit alors $x > 0$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \int_0^x \frac{t}{c^2} e^{-\frac{t^2}{2c^2}} dt \\ &= \left[-e^{-\frac{t^2}{2c^2}} \right]_0^x \\ &= 1 - e^{-\frac{x^2}{2c^2}} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1 ; f est bien une densité de probabilité.

3. (a) On reconnaît l'intégrale de Gauss, qui vaut $\sqrt{2\pi}$.
 (b) La fonction intégrée dans la question précédente étant paire, on a donc aussi

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

On peut alors faire le changement de variable $u = cx$, qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{c} e^{-\frac{t^2}{2c^2}} dt$$

converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, et donc par linéarité, l'intégrale cherchée converge et vaut $c\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

- (c) La variable X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^\infty \frac{t^2}{c^2} e^{-\frac{t^2}{2c^2}} dt$ converge absolument. Soit alors $A > 0$. On définit les fonctions :

$$u : \begin{array}{ccc} [0, A] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{ccc} [0, A] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -e^{-\frac{t^2}{2c^2}} \end{array}.$$

Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$, et par théorème d'intégration par parties, on a donc

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{t^2}{c^2} e^{-\frac{t^2}{2c^2}} dt &= \int_0^A u(t)v'(t) dt \\ &= [u(t)v(t)]_0^A - \int_0^A u'(t)v(t) dt \\ &= -Ae^{-\frac{A^2}{2c^2}} + \int_0^A e^{-\frac{t^2}{2c^2}} dt \end{aligned}$$

Lorsque $A \rightarrow \infty$, le premier terme tend vers 0 par croissances comparées, et le second tend vers $c\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ par la question précédente.

Ainsi, la variable X admet une espérance, qui vaut $c\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4. Supposons que la variable X^n possède une espérance. Par théorème de transfert, la variable X^{n+2} admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^\infty \frac{t^{n+3}}{c^2} e^{-\frac{t^2}{2c^2}} dt$ converge.

Soit alors $A > 0$. Par théorème d'intégration par parties, les fonctions impliquées étant de classe $\mathcal{C}^1$, on a alors

$$\begin{aligned} \int_0^A t^{n+3} \frac{1}{c^2} e^{-\frac{t^2}{2c^2}} dt &= \left[-t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2c^2}} \right]_0^A + \int_0^A (n+2)t^{n+1} e^{-\frac{t^2}{2c^2}} dt \\ &\xrightarrow{A \rightarrow \infty} (n+2) \int_0^\infty t^{n+1} e^{-\frac{t^2}{2c^2}} dt \\ &= c^2(n+2)\mathbb{E}(X^n) \end{aligned}$$

Ainsi, X^{n+2} admet bien une espérance, et

$$\mathbb{E}(X^{n+2}) = c^2(n+2)\mathbb{E}(X^n).$$

5. Montrons ce résultat par récurrence :

- On a bien $\mathbb{E}(X^0) = 1$ et $\mathbb{E}(X^1) = \frac{\sqrt{2\pi}c}{2}$.
- Supposons que les espérances de X^{2n} et X^{2n+1} existent et valent la valeur proposée. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^{2n+2}) &= c^2(2n+2)\mathbb{E}(X^{2n}) \quad \text{par la question 4} \\ &= c^2(2n+2)2^n c^{2n} n! \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 2^{n+1} c^{2n+2} (n+1)! \\ \mathbb{E}(X^{2n+3}) &= c^2(2n+3)\mathbb{E}(X^{2n+1}) \\ &= c^2(2n+3)\sqrt{2\pi} \frac{(2n+1)! c^{2n+1}}{2^{n+1} n!} \\ &= \sqrt{2\pi} \frac{(2n+1)! c^{2n+3} (2n+3)(2n+2)}{2^{n+1} n! (2n+2)} \\ &= \sqrt{2\pi} \frac{(2n+3)! c^{2n+3}}{2^{n+2} (n+1)!} \end{aligned}$$

Finalement, par récurrence, on a bien le résultat demandé.

6. (a) Pour toute variable aléatoire Y admettant une variance, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\varepsilon^2}.$$

- (b) D'après la question 5, on a $\mathbb{E}(X^2) = 2c^2$ et par la formule de Huygens, on a donc

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 2c^2 - c^2 \frac{\pi}{2} = c^2 \frac{4 - \pi}{2}.$$

- (c) Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(X \in [c\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \varepsilon, c\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \varepsilon]) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Il suffit donc de choisir $\varepsilon = 10\sqrt{\mathbb{V}(X)}$ pour obtenir l'intervalle demandé.

7. On a pour tout $\gamma > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in [0, \gamma]) &= \int_0^\gamma \frac{t}{c^2} e^{-\frac{t^2}{2c^2}} dt \\ &= 1 - e^{-\frac{\gamma^2}{2c^2}} \end{aligned}$$

et il suffit donc de prendre $\gamma = 2c\sqrt{\ln(10)}$.

8. Dans la question 6c, on avait trouvé $\alpha = c\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 10c\sqrt{\frac{4-\pi}{2}} < 0$ d'après l'indication.

Ainsi, comme la densité de X est nulle sur $\mathbb{R}_-$, on a donc

$$\mathbb{P}(X \in [0, \beta]) \geq 0,99.$$

Par croissance de la fonction de répartition de X , on a donc $\beta \geq \gamma$, et l'intervalle de la question 7 est donc plus petit que celui de la question 6c.

Problème

I. Matrice de transition

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_n = i)_{0 \leq i \leq 2}$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = i)\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = i)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = i)\mathbb{P}(X_n = 2).$$

En calculant les probabilités conditionnelles, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= 1 \times \mathbb{P}(X_n = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) \end{aligned}$$

Par exemple pour le premier cas, la seule façon d'obtenir l'urne U_1 vide est d'avoir au coup précédent une seule boule (probabilité $\mathbb{P}(X_n = 1)$), et de choisir le nombre 1 aléatoirement (probabilité $\frac{1}{2}$).

On a donc bien $Y_{n+1} = AY_n$.

- (b) Cherchons les valeurs propres de A_2 . Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$. On calcule le rang de la matrice $A_2 - \lambda I_3$ par le pivot de Gauss

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 - 2\lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 1 - 2\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda(2 - 2\lambda^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $A_2 - \lambda I_3$ n'est pas inversible si $\lambda \in \{0, 1, -1\}$.

La matrice A_2 a donc trois valeurs propres et est de taille 3, et donc est diagonalisable.

2. Pour tout $i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, on a par la formule des probabilités totales, le nombre de boules ne pouvant augmenter ou diminuer que d'une unité :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \frac{i+1}{N} \mathbb{P}(X_n = i+1) + \frac{N-i+1}{N} \mathbb{P}(X_n = i-1).$$

En effet, pour avoir i boules, il faut avoir eu $i-1$ boules et choisi un nombre strictement supérieur à $i-1$, ou avoir eu $i+1$ boules et choisi un nombre inférieur ou égal à $i+1$. De plus, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{N} \mathbb{P}(X_n = 1) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = N) = \frac{1}{N} \mathbb{P}(X_n = N-1).$$

On retrouve bien la relation $Y_{n+1} = A Y_n$.

3. Faisons les deux cas :

- Pour $N = 2$ on a

$${}^t A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^t A$ associé à 1 si et seulement si

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

On doit donc avoir $x = y = z = 1$, et donc

$$E_1({}^t A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- Pour $N = 3$, on a

$${}^t A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à 1 si et seulement si

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ \frac{1}{3}x - y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}y - z + \frac{1}{3}t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

On doit donc avoir $x = y = z = t$, et donc

$$E_1({}^tA) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

4. On note que les sommes des colonnes de A valent toutes 1, et donc les sommes des lignes de tA valent toutes 1. En notant U le vecteur colonne dont tous les coefficients sont 1, on a donc

$$AU = U.$$

Ainsi, 1 est valeur propre de A .

5. Ainsi, $\ker(A - I_{N+1})$ n'est pas nul (par exemple, U est dans cet ensemble), et donc ${}^t(A - I_{N+1})$ n'est pas inversible.

La transposée de cette matrice, donc $A - I_{N+1}$ n'est donc pas non plus inversible, et donc 1 est valeur propre de A .

II. Détermination de l'espérance de la variable aléatoire X_n

1. Le nombre de boules dans l'urne U_1 ne peut qu'augmenter ou diminuer d'une boule, et donc $X_{n+1} - X_n$ ne peut valoir que 1 ou -1.
2. Cherchons la probabilité que $X_{n+1} - X_n = 1$.

Le système $([X_n = k])_{0 \leq k \leq N}$ est un système complet d'événements, et par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) &= \sum_{k=0}^N \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} - X_n = -1) \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{k}{N} \mathbb{P}(X_n = k) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) &= 1 \times \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) - 1 \times \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) \\ &= 1 - 2 \sum_{k=0}^N \frac{k}{N} \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= 1 - \frac{2}{N} \mathbb{E}(X_n) \end{aligned}$$

3. On a donc par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \frac{N-2}{N} \mathbb{E}(X_n).$$

Posons alors $\ell = \frac{N}{2}$. La suite $(\mathbb{E}(X_n) - \frac{N}{2})$ est alors une suite géométrique de raison $\frac{N-2}{N}$, et donc pour tout n

$$\mathbb{E}(X_n) = \left(\mathbb{E}(X_0) - \frac{N}{2} \right) \left(\frac{N-2}{N} \right)^n + \frac{N}{2}.$$

4. Pour $N > 2$, on a $\frac{N-2}{N} \in]-1, 1[$ et donc la suite $(\mathbb{E}(X_n))$ converge, vers $\frac{N}{2}$.

Après un grand nombre d'étape, en moyenne, les deux boules auront donc autant de boules l'une que l'autre.

III. Étude la probabilité stationnaire

1. D'après la matrice A , on a :

$$X \in E_1 \leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{N}x_1 = x_0 \\ x_0 + (2/N)x_2 = x_1 \\ \frac{N-1}{N}x_1 + \frac{3}{N}x_3 = x_2 \\ \dots \\ \frac{2}{N}x_{N-2} + x_N = x_{N-1} \\ \frac{1}{N}x_{N-1} = x_N \end{cases}$$

On va démontrer la relation demandée par récurrence forte sur k .

- Pour $k = 0$, la relation est vérifiée, car $\binom{N}{0} = 1$; pour $k = 1$, la première ligne du système ci-dessus donne $x_1 = Nx_0 = \binom{N}{1}x_0$.
- Supposons que pour un $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ donné, on ait $\forall i \leq k, x_i = \binom{N}{i}x_0$. Sur la ligne $k + 1$ du système ci-dessus, on a :

$$\frac{N - (k - 1)}{N}x_{k-1} + \frac{k + 1}{N}x_{k+1} = x_k$$

d'où :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{N}{k+1} \left(x_k - \frac{N-k+1}{N}x_{k-1} \right) \\ &= \frac{N}{k+1} \left(\binom{N}{k} - \frac{N-k+1}{N} \binom{N}{k-1} \right) x_0 \\ &= \frac{N}{k+1} \left(\frac{N!}{k!(N-k)!} - \frac{N-k+1}{N} \frac{N!}{(k-1)!(N-k+1)!} \right) x_0 \\ &= \frac{N}{k+1} \left(\frac{N!}{k!(N-k)!} - \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!} \right) x_0 \\ &= \frac{N}{k+1} \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!} \left(\frac{N}{k} - 1 \right) x_0 \\ &= \frac{N!}{(k+1)!(N-k)!} (N-k)x_0 \\ &= \frac{N!}{(k+1)!(N-k-1)!} x_0 \\ &= \binom{N}{k+1} x_0 \end{aligned}$$

- Donc par récurrence, on a bien $x_k = \binom{N}{k}x_0$ pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

2. Ainsi, on a

$$E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \binom{N}{0} \\ \vdots \\ \binom{N}{N} \end{pmatrix} \right).$$

3. On reconnaît le binôme de Newton :

$$S = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} 1^k 1^{N-k} = 2^N.$$

4. Soit π un tel vecteur propre. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \pi_k &= 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^N \pi_0 \binom{N}{k} = 1 \\ &\Leftrightarrow \pi_0 = \frac{1}{2^N} \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^N} \binom{N}{0} \\ \vdots \\ \frac{1}{2^N} \binom{N}{N} \end{pmatrix}.$$

5. On reconnaît une loi binomiale de paramètres N et $\frac{1}{2}$.

Elle est donc d'espérance $\frac{N}{2}$ et de variance $\frac{N}{4}$.

6. Si X_0 suit cette même loi, on a donc $Y_0 = \pi$. Montrons par récurrence que $Y_n = \pi$ pour tout n :

- pour $n = 0$, c'est l'hypothèse
- Supposons que $Y_n = \pi$. On a alors $Y_{n+1} = AY_n$ par la question I.2., puis $AY_n = A\pi = \pi$ par hypothèse de récurrence et car π est vecteur propre de A associé à 1.

Par récurrence, la suite (Y_n) est constante égale à π .

Ce résultat justifie le terme de "probabilité stationnaire". En partant de cette configuration aléatoire, les probabilités d'avoir un certain nombre de boules dans U_1 ne dépend pas du nombre de coups.