G2E

2021

Problème 1

Partie A

1. (a) Il suffit de multiplier la fraction aux numérateur et dénominateur par e^{-x}, qui est bien non nul.

   (b) L'équation homogène est donc
$$y' - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} y = 0,$$
qui admet pour solutions les fonctions $x \mapsto \frac{K}{1+e^{-x}}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

2. (a) On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \frac{K(x)}{1+e^{-x}}$, avec K une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors pour tout x
$$y'(x) = \frac{K'(x)(1+e^{-x}) + K(x)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2},$$
et donc
$$y'(x) - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} y(x) = \frac{K'(x)}{1+e^{-x}} = -\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^3}.$$
On trouve alors
$$K'(x) = -\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2},$$
et donc $K(x) = \frac{1}{1+e^x}$ convient.
Finalement, une solution particulière est donnée par $x \mapsto \frac{1}{(1+e^{-x})(1+e^x)} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, et on retrouve l'ensemble des solutions proposé.

   (b) Au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{e^x}{1+e^x} \sim 1$, et donc $y(x) \sim \lambda + \frac{1}{1+e^x}$.
On a donc
$$y(x) \sim \begin{cases} \lambda & \text{si } \lambda \neq 0 \\ e^{-x} & \text{si non} \end{cases}.$$

Partie B

1. (a) f est la solution trouvée en A2a, en prenant $\lambda = 0$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\frac{e^{2x}}{e^{2x}} \\ &= \frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

La fonction f est donc paire.

(b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^3}(1-e^x).$$

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(c) La fonction f est continue et positive. De plus, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t &= \int_a^b \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{-1}{1+e^t}\right]_a^b \\ &\xrightarrow[\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}]{} 1 \end{aligned}$$

f est donc bien une fonction de densité.

2. (a) Soient $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $a > x$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_x^a e^{-kt}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{k}e^{-kt}\right]_x^a \\ &= \frac{1}{k}\left(e^{-kx} - e^{-ka}\right) \\ &\xrightarrow[a\to\infty]{} \frac{1}{k}e^{-kx} \end{aligned}$$

L'intégrale est donc bien convergente, et vaut la valeur demandée.

(b) Soit $x \geqslant 0$. On a

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_x^\infty e^{-kt}\mathrm{d}t \\ &= \int_x^\infty \sum_{k=1}^{n}\left(e^{-t}\right)^k \mathrm{d}t \\ &= \int_x^\infty e^{-t}\frac{1-(-1)^n e^{-nt}}{1+e^{-t}}\mathrm{d}t \quad \text{car } e^{-t} \neq -1 \end{aligned}$$

Or l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\mathrm{d}t$ converge, et vaut $\ln(1+e^{-x})$.
On retrouve bien l'égalité demandée.

(c) On note que

$$\begin{aligned} \left|\int_x^\infty \frac{e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}\mathrm{d}\right| &\leqslant \int_x^\infty e^{-nt}\mathrm{d}t \quad \text{par croissance de l'intégrale et inégalité triangulaire} \\ &\leqslant \frac{1}{n}e^{-nt} \end{aligned}$$

Avec la question précédente, on trouve bien le résultat.

(d) On note que pour tout $t > 0$, on a $\ln(1+t) \leqslant t$, et donc

$$\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant \ln(1+e^{-x}) \leqslant e^{-x}.$$

L'intégrale de e^{-x} étant convergente, par théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^\infty \ln(1+e^{-x})\mathrm{d}x$ est bien convergente.
On a alors

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty \ln(1+e^{-x})\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{n^2}\right| &= \left|\int_0^\infty \ln(1+e^{-x})\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}\int_0^\infty e^{-kt}\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^\infty \left|\ln(1+e^{-x}) - g_n(x)\right|\mathrm{d}x \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leqslant \int_0^\infty \frac{1}{n}e^{-nx}\mathrm{d}x \quad \text{par la question précédente} \\ &\leqslant \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

3. (a) On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\right| = \frac{1}{k^2}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, on a bien le résultat voulu.

(b) Ainsi, quand $n \to \infty$ dans le résultat de B2d, on obtient

$$\int_0^\infty \ln(1+e^{-x})\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Partie C

1. (a) On note que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leqslant \frac{e^x}{1+e^x} \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant \frac{1}{1+e^x} \leqslant e^{-x}.$$

En multipliant ces inégalités, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant e^{-x}.$$

(b) La fonction $x \mapsto xf(x)$ étant impaire, si son intégrale converge, alors elle est nulle.
On a alors au voisinage de $+\infty$: $xf(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. À partir d'un certain rang, on a donc $xf(x) \leqslant \frac{1}{x^2}$, et par théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale sur $[0,\infty[$ de $xf(x)$ est convergente.
Par imparité, son intégrale sur $\mathbb{R}$ est donc convergente, et donc nulle.

2. (a) Soit $a > 0$. Soient

$$u : \begin{array}{ccc}[0,a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{-1}{1+e^x}\end{array} \quad \text{et } v : \begin{array}{ccc}[0,a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2\end{array}$$

qui sont bien de classe $\mathcal{C}^1$. Par théorème d'intégration par parties, on a donc

$$\int_0^a \frac{x^2e^x}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{1+e^a} + \int_0^a \frac{2x}{1+e^x}\mathrm{d}x.$$

De même, en utilisant les fonctions $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto -\ln(1+e^{-x})$, on obtient

$$\int_0^a \frac{2x}{1+e^x}\mathrm{d}x = 2a\ln(1+e^{-a}) + \int_0^\infty 2\ln(1+e^{-x})\mathrm{d}x.$$

Or, quand $a \to \infty$, on a $\frac{a^2}{1+e^a} \to 0$ et $2a\ln(1+e^{-a}) \sim 2ae^{-a} \to 0$.
Finalement, on a bien l'égalité voulue.

(b) Par la question précédente, X admet donc un moment d'ordre 2, et donc une variance. On a, par parité

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}.$$

Par la formule de Konig-Huygens, on a alors

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{\pi^2}{3}.$$

Problème 2

Partie A

On note A_n (resp. B_n) l'événement « le virus se trouve en A (resp. B) au bout de $2n$ semaines. ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\{A_n, B_n\}$ est un système complet d'événements, et par la formule des probabilités totales, on a donc

$$u_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(B_n) = pu_n + qv_n.$$

De même,

$$v_{n+1} = qu_n + pv_n.$$

2. (a) Le virus étant initialement en A, on a donc $C_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Par le question précédente, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $C_{n+1} = MC_n$ avec

$$M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

(b) M est symétrique réelle, donc diagonalisable. Ses valeurs propres sont racines de $X^2 - 2pX + p^2 - q^2$, et donc $\mathrm{Spec}(M) = \{p - q, 1\}$.

On note que $E_1(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{p-q}(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a donc $M = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} p-a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) On note que $P^{\mathbf{T}}P = 2I_2$, et donc $P^{-1} = \frac{1}{2}P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. (a) Une récurrence rapide permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$C_n = PD^nP^{-1}C_0.$$

On trouve alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{1}{2}(1 + (p-q)^n) \text{ et } v_n = \frac{1}{2}(1 - (p-q)^n).$$

(b) On a $p-q\in]-1,1[$, et donc $(p-q)^n\to 0$. Ainsi, les deux suites convergent, vers $\frac{1}{2}$.

4. Par symétrie, il suffirait d'inverser u_n et v_n.

Partie B

1. On a donc $\mathbb{P}(X_i=1)=u_i$ et $\mathbb{P}(X_i=-1)=v_i$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(X_i)=u_i-v_i=(p-q)^i.$$

De plus, X_i^2 est une variable constante égale à 1, et donc $\mathbb{E}(X_i^2)=1$. On a alors

$$\mathbb{V}(X_i)=1-(p-q)^{2i}.$$

2. (a) Si le virus est en A au bout de $2i$ semaines, c'est comme si l'expérience recommençait au départ, les probabilités ne dépendant que de l'étape précédente. Ainsi

$$\mathbb{P}(X_j=1|X_i=1)=\mathbb{P}(X_{j-i}=1).$$

(b) On a par formule des probabilités composées

$$\mathbb{P}(X_j=1,\ X_i=1)=\mathbb{P}(X_j=1|X_i=1)\mathbb{P}(X_i=1)=\frac{1}{4}\left(1+(p-q)^{j-i}\right)\left(1+(p-q)^i\right).$$

(c) On trouve de la même façon, par symétrie entre A et B

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_j=-1,X_i=1)&=\frac{1}{4}\left(1-(p-q)^{j-i}\right)\left(1+(p-q)^i\right)\\ \mathbb{P}(X_j=1,X_i=-1)&=\frac{1}{4}\left(1-(p-q)^{j-i}\right)\left(1-(p-q)^i\right)\\ \mathbb{P}(X_j=-1,X_i=-1)&=\frac{1}{4}\left(1+(p-q)^{j-i}\right)\left(1-(p-q)^i\right)\end{aligned}$$

(d) On a donc

$$\mathbb{P}(X_iX_j=1)=\mathbb{P}(X_i=1,\ X_j=1)+\mathbb{P}(X_i=-1,\ X_j=-1)=\frac{1}{2}\left(1+(p-q)^{j-i}\right)=\mathbb{P}(X_{j-i}=1).$$

On a donc $\mathbb{E}(X_iX_j)=\mathbb{E}(X_{j-i})=(p-q)^{j-i}$.

3. (a) On a par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n)&=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n\mathbb{E}(X_i)\\ &=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n(p-q)^i\\ &=\frac{1-(p-q)^{n+1}}{2q(n+1)}\end{aligned}$$

car $p-q\neq 1$.

(b) Soit donc P_n la propriété à montrer.

- On a $M_0=X_0$, et donc P_0 est claire.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose P_n. On note que $M_{n+1} = \frac{1}{n+2}\left((n+1)M_n + X_{n+1}\right)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1}^2) &= \frac{1}{(n+2)^2}\left((n+1)^2\mathbb{E}(M_n) + 2(n+1)\mathbb{E}(M_n X_{n+1}) + \mathbb{E}(X_{n+1}^2)\right) \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\mathbb{E}(X_iX_j)\right) + \frac{2}{(n+2)^2}\sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}(X_iX_{n+1}) + \frac{1}{(n+2)^2} \\
&= \frac{1}{n+2} + \frac{2}{(n+2)^2}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n+1}\mathbb{E}(X_jX_j)
\end{aligned}$$

  On a donc P_{n+1}.

Par récurrence, on a bien l'égalité voulue.

(c) La variance empirique est définie par

$$V_n = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} X_k^2 - M_n^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V_n) &= \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}(X_k)^2 - \mathbb{E}(M_n^2) \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\mathbb{E}(X_iX_j) \\
&= -\frac{2}{(n+1)^2}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}(p-q)^{j-i} \\
&= -\frac{2}{(n+1)^2}\sum_{j=1}^{n}(p-q)^j\sum_{i=0}^{j-1}(p-q)^{-i} \\
&= -\frac{2}{(n+1)^2}\frac{p-q}{2a}\sum_{j=1}^{n}1-(p-q)^j \\
&= \frac{q-p}{q(n+1)^2}\left(n-(p-q)\frac{1-(p-q)^n}{2q}\right)
\end{aligned}$$

Partie C

1. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_{2n} = C_n$.

2. (a) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
C_{n+1} &= D_{2n+2} \\
&= N^2 D_{2n} \\
&= N^2 C_n
\end{aligned}$$

Or on a vu que $C_{n+1} = MC_n$. Par différence, on a donc $(N^2 - M)C_n = 0$.

(b) On a donc deux vecteurs dans le noyau de $N^2 - M$: $C_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $C_1 = \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$, qui forment une famille libre.
Ainsi, le noyau de $N^2 - M$ est de dimension au moins 2, et donc de dimension 2, puisqu'on est dans $\mathbb{R}^2$.
Donc $N^2 - M = 0$.

(c) On a
$$\Delta^2 = P^{-1}NPP^{-1}NP = P^{-1}N^2P = P^{-1}MP = D.$$
Posons alors $\Delta = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. On a alors
$$\begin{pmatrix} a^2+bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Si on avait $a+d=0$, alors on aurait $p-q=1$, ce qui est impossible. Donc $a+d\neq 0$, et donc $b=c=0$: Δ est une matrice diagonale.

Pour que N existe, il faut donc avoir $p-q \geqslant 0$, et les matrices possibles pour Δ sont
$$\begin{pmatrix} \sqrt{p-q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{p-q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{p-q} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{p-q} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) On a alors, en notant a et d les coefficient diagonaux de Δ :
$$N = P\Delta P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & d-a \\ d-a & a+d \end{pmatrix}.$$
Or N doit être à coefficients positifs, on doit donc avoir $d \geqslant a$. Ainsi, on a nécessairement $d=1$, et les seules possibilités pour N sont donc
$$\begin{pmatrix} \sqrt{p-q}+1 & 1-\sqrt{p-q} \\ 1-\sqrt{p-q} & 1+\sqrt{p-q} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -\sqrt{p-q}+1 & 1+\sqrt{p-q} \\ 1+\sqrt{p-q} & 1-\sqrt{p-q} \end{pmatrix}.$$

Partie D

1. (a) On note que $M^2=0$. Si $Y \in \mathrm{Im}(M)$, il existe donc X tel que $MX=Y$, et alors $MY=M^2X=0$. Donc $Y \in \ker(M)$.

   Or M est de rang 1, et donc par théorème du rang, $\ker(M)$ est de dimension 1.

   Ainsi, on a bien $\ker(M) = \mathrm{Im}(M)$.

   (b) On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cherchons alors $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $MV=U$; on doit donc avoir $-x+y=1$. Donc $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

   Les vecteurs U et V forment une base de $\mathbb{R}^2$, et par formule de changement de base, en posant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a bien
$$M = QTQ^{-1}.$$

2. (a) Soit $\Theta = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. On a alors
$$\Theta^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Ainsi, $a+d \neq 0$, et donc $b=0$. Mais alors $a=0=d$, ce qui est impossible.

   Ainsi, cette équation matricielle n'admet pas de solution.

   (b) S'il existait N telle que $N^2=M$, alors on aurait $Q^{-1}N^2Q=T$, et donc
$$(Q^{-1}NQ)^2 = T.$$
   Or on a vu dans la question précédente que c'était impossible.

   Ainsi, il n'existe aucune matrice N telle que $N^2=M$.