Devoir surveillé 1

Angers Le Fresne : BCPST 2

16 Septembre 2023

Durée de l'épreuve : 2h. Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve.

Exercice 1. Approximation rationnelle d'une réciproque

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t^3 + t.$$

Dans la partie I, on étudie la fonction réciproque g de f. Dans la partie II, on étudie un algorithme d'approximation de g à l'aide d'une suite de fonctions rationnelles.

Partie A. Étude de g

1. *Variations de g*

1.1. Construire la courbe représentative C de la fonction f.

1.2. Montrer que f admet une fonction réciproque ; soit g cette fonction. Ainsi, pour tout nombre réel x, on a

$$g(x)^3 + g(x) = x.$$

Montrer que la fonction g est strictement croissante et impaire. Construire sa courbe représentative dans le même repère que C.

1.3. Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$; exprimer g' en fonction g. En déduire sans calcul la variation de g'.

2. *Étude locale et asymptotique de g*

2.1. Montrer que pour tout n, g est de classe $\mathcal{C}^n$, et qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que Q_n n'ait aucune racine réelle, et $g^{(n)} = \frac{P_n(g)}{Q_n(g)}$.

2.2. En déduire que la fonction g admet un développement limité en tout ordre en 0.

2.3. Expliciter ce développement à l'ordre 3.

2.4. Montrer que $g(x) \sim x^{\frac{1}{3}}$ au voisinage de $+\infty$.

2.5. On écrit $g(x)$ sous la forme $x^{\frac{1}{3}}(1 + h(x))$, où $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

Expliciter la relation satisfaite par la fonction h. En déduire que la fonction $x \mapsto x^{\frac{2}{3}} h(x)$ admet en $+\infty$ une limite finie que l'on déterminera.

Partie B. Approximation rationnelle de g

Dans cette partie, on prend x dans l'intervalle $[0, +\infty[$. On interprète $g(x)$ comme l'unique solution de l'équation $t^3 + t = x$, c'est-à-dire comme l'abscisse du point d'intersection de la courbe C avec la droite D_x parallèle à l'axe des abscisses et d'ordonnée x. On se propose d'approcher $g(x)$ à l'aide de la suite de terme général $u_n(x)$ ainsi construite : on pose $u_0(x) = x$ et on prend pour $u_1(x)$ l'abscisse du point d'intersection de D_x avec la tangente à C au point d'abscisse x ; on itère ce processus en considérant l'abscisse $u_{n+1}(x)$ du point d'intersection de D_x avec la tangente à C au point d'abscisse $u_n(x)$.

3. *Construction de l'algorithme d'approximation*

Soit t un nombre réel positif. Prouver que l'abscisse du point d'intersection de D_x avec la tangente à C au point d'abscisse t est égale à $\frac{2t^3+x}{3t^2+1}$.

On considère donc la suite définie par la relation de récurrence

$$u_0(x) = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(x) = \frac{2u_n(x)^3 + x}{3u_n(x)^2 + 1}.$$

4. *Étude graphique d'un exemple*

Dans cette question, on prend $x = 1$. Sur un même figure, tracer soigneusement l'arc de C correspondant aux valeurs de t appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ et construire $u_1(1)$ et $u_2(1)$.

5. *Étude de l'algorithme*

Soit φ la fonction numérique qui à tout nombre réel positif t associe : $\varphi(t) = \frac{2t^3+x}{3t^2+1}$.

5.1. Étudier le signe de $t - \varphi(t)$ pour tout t positif.

5.2. Calculer la dérivée de φ. Étudier le signe de φ'.

5.3. En déduire que l'intervalle $[g(x), x]$ est stable par φ, *i.e.* que

$$\forall t \in [g(x), x],\ \varphi(t) \in [g(x), x].$$

5.4. Montrer que pour tout $t \in [g(x), x]$, on a $0 \leqslant t^3 + t - x \leqslant t^3$.
En déduire que pour tout $t \in [g(x), x]$, on a

$$0 \leqslant \varphi'(t) \leqslant \frac{2}{3}.$$

6. *Étude de la convergence*

6.1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n(x)$ appartient à l'intervalle $[g(x), x]$.

6.2. Montrer que la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle converge vers $g(x)$.

6.3. Prouver que, pour tout nombre entier naturel n :

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - g(x) \leqslant \frac{2}{3}(u_n(x) - g(x)).$$

6.4. Soit a un nombre positif. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\beta_n = \sup\limits_{x\in[0,a]} (u_n(x) - g(x))$.

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n a$.

6.5. Prouver que, pour tout nombre réel positif t :

$$\varphi(t) - g(x) = (t - g(x))^2 \frac{2t + g(x)}{3t^2 + 1}.$$

Montrer que pour tout élément t de $[g(x), x]$,

$$0 \leqslant \varphi(t) - g(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(t - g(x))^2.$$

On pourra étudier la variation de la fonction $t \mapsto \frac{3t}{3t^2+1}$.

6.6. En déduire que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_n(x) - g(x) \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n-1} u_n(x)^{3\times 2^n}.$$

Exercice 2. Des sommes de racines n-ièmes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

1. Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. Montrer que $\omega^j = 1$ si et seulement si $j = 0$ ou $j = n$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{jk}$ pour $j \in \{1, \dots, n-1\}$, puis pour $j = 0$ et $j = n$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer l'égalité suivante :

$$(\star) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = n(z^n + 1).$$

4. On veut calculer la somme

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

4.1. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}}.$$

4.2. Conclure en choisissant une bonne valeur de z dans l'égalité $(\star)$.

5. On veut calculer la somme

$$S' = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right).$$

5.1. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$e^{\frac{i\pi}{n}} + e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}.$$

5.2. Conclure en choisissant une bonne valeur de z dans l'égalité $(\star)$.