Devoir surveillé 1

Angers Le Fresne : BCPST 2

16 Septembre 2023

Durée de l'épreuve : 2h. Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve.

Exercice 1. Approximation rationnelle d'une réciproque

1. **1.1.** TODO

   1.2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de la bijection, elle induit donc une bijection sur son image, qui est ici $\mathbb{R}$.
   Ainsi, f admet une réciproque g définie sur $\mathbb{R}$.
   De plus g a le même sens de variation que f, donc est strictement croissante.
   On note que la fonction f est impaire. Soit alors $x \in \mathbb{R}$, et soit t tel que $f(t) = x$. On a alors

$$\begin{aligned} g(-x) &= g(-f(t)) \\ &= g(f(-t)) \quad \text{par imparité de } f \\ &= -t \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

   La fonction g est donc impaire.
   Courbe TODO

   1.3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f' : x \mapsto 3x^2 + 1$. La fonction g est donc la réciproque d'une fonction dérivable dont la dérivée ne s'annule pas, et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x)} = \frac{1}{3g(x)^2 + 1}.$$

   On note que $f(0) = 0$, et donc $g(0) = 0$. La fonction g étant strictement croissante, elle est donc positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$.
   Ainsi, la fonction g' est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. **2.1.** Montrons par récurrence la propriété ψ_n : "la fonction g est de classe $\mathcal{C}^n$, et il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que Q_n n'ait pas de racine réelle, et $g^{(n)} = \frac{P_n(g)}{Q_n(g)}$."

   - On a clairement ψ_0 avec $P_0 = X$ et $Q_0 = 1$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons ψ_n. Alors la fonction $g^{(n)}$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et

$$\begin{aligned} g^{(n+1)} &= \frac{g' P_n'(g) Q_n(g) - g' P_n(g) Q_n'(g)}{Q_n(g)^2} \\ &= \frac{P_n(g) Q_n(g) - P_n(g) Q_n'(g)}{(1 + 3g(x)^2) Q_n(g)^2} \end{aligned}$$

     Soient alors $P_{n+1} = P_n' Q_n - P_n Q_n'$ et $Q_{n+1} = (1 + 3X^2) Q_n^2$.
     On a alors $g^{(n+1)} = \frac{P_{n+1}(g)}{Q_{n+1}(g)}$, et Q_{n+1} n'a pas de racine réelle car ni Q_n ni $1 + 3X^2$ n'en ont.

   Par récurrence, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, ψ_n.

2.2. Par la formule de Taylor-Young, g admet bien un développement limité à tout ordre en 0.

2.3. Notons $g(x) = ax + bx^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ ce développement limité, par imparité de g.

Comme $f(0) = 0$, on a donc

$$x = g(f(x)) = af(x) + bf(x)^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(f(x)^3\right),$$

et donc en développant

$$x = ax + ax^3 + bx^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

Par unicité du développement limité, on a donc $a = 1$ et $b = -1$, et finalement

$$g(x) = x - x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

2.4. On note que g étant croissante et bijective, elle tend nécessairement vers $+\infty$ en $+\infty$.

On a alors pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}} &= \frac{g(x)}{f(g(x))^{\frac{1}{3}}}\\ &= \frac{g(x)}{(g(x)+g(x)^3)^{\frac{1}{3}}}\\ &= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{g(x)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}\\ &\xrightarrow[x\to\infty]{} 1\end{aligned}$$

On a donc bien $g(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{\frac{1}{3}}$.

2.5. On a pour tout x : $g(x)^3 + g(x) = x$, et donc

$$x^{\frac{1}{3}}(1+h(x)) + x(1+h(x))^3 = x.$$

On a donc

$$x^{\frac{2}{3}}((1+h(x))^3 - 1) = -(1+h(x)) \underset{x\to\infty}{\sim} -1.$$

D'autre part, comme h tend vers 0, $(1+h(x))^3 - 1 \underset{x\to\infty}{\sim} 3h(x)$.

On a alors $3x^{\frac{2}{3}}h(x) \underset{x\to\infty}{\sim} -1$, et donc $x^{\frac{2}{3}}h(x) = -\frac{1}{3}$.

3. La tangente au point d'abscisse t a pour équation

$$y = f'(t)(x-t) + f(t) = (3t^2+1)(x-t) + t^3 + t = (3t^2+1)x - 2t^3.$$

Notons u l'abscisse cherchée. On a alors

$$(3t^2+1)u - 2t^3 = x,$$

et donc $u = \frac{2t^3+x}{3t^2+1}$.

4. TODO

5. **5.1.** Soit $t > 0$. On a alors

$$t - \varphi(t) = \frac{t^3+t-x}{3t^2+1}.$$

Ainsi, $t - \varphi(t)$ est positif si et seulement si $t^3 + t \geqslant x$, *i.e.* si $t \in [g(x), \infty[$.

5.2. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car son dénominateur ne s'annule pas, et pour tout t positif

$$\varphi'(t) = \frac{6t^2(3t^2+1)-(2t^3+x)6t}{(3t^2+1)^2} = \frac{6t(t^3+t-x)}{(3t^2+1)^2}.$$

Ainsi, φ' est positif si et seulement si $t \geqslant g(x)$.

5.3. Soit donc $t \in [g(x), x]$.
Par la question précédente, on a donc par croissance de φ

$$\varphi(g(x)) \leqslant \varphi(t) \leqslant t.$$

Or on note que $\varphi(g(x)) = g(x)$, et comme $x \geqslant g(x)$, on a donc $x \geqslant \varphi(x)$.
Finalement, on a bien $\varphi(t) \in [g(x), x]$.

5.4. Si $t \leqslant x$, il est clair que $t - x \leqslant 0$, et donc $t^3 + t - x \leqslant t^3$. De plus, on a déjà vu que si $t \geqslant g(x)$, alors $t^3 + t - x \geqslant 0$.
On a vu en 6b que pour $t \geqslant g(x)$, $\varphi'(t) \geqslant 0$.
On a ensuite, en notant que $3t^2 + 1 \geqslant 3t^2$:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{6t(t^3+t-x)}{(3t^2+1)^2}\\ &\leqslant \frac{6t^4}{9t^4}\\ &\leqslant \frac{2}{3}\end{aligned}$$

6. **6.1.** D'après la question 6b, l'intervalle $[g(x), x]$ est stable par φ. Comme $u_0(x)$ est dans cet intervalle, il est clair que $u_1(x)$ le sera aussi, et une récurrence immédiate prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \in [g(x), x]$.

6.2. On a vu en 6a que $t - \varphi(t)$ est positif dès que $t \geqslant g(x)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors par la question précédente, on a $u_n(x) \geqslant g(x)$, et donc

$$u_n(x) \geqslant \varphi(u_n(x)) = u_{n+1}(x).$$

La suite est donc décroissante.
Puisqu'elle est minorée (par $g(x)$), elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite.
On a alors, en passant à la limite dans la relation $u_{n+1}(x) = \varphi(u_n(x))$, la fonction φ étant continue sur $\mathbb{R}$, $\ell = \varphi(\ell)$.
On vérifie facilement comme en 6a que nécessairement, $\ell = g(x)$.

6.3. La partie droite de l'inégalité est évidente, $g(x)$ étant un minorant de la suite.
Ensuite, la fonction φ est continue sur $[g(x), u_n(x)]$ et dérivable sur $]g(x), u_n(x)[$, et donc par le théorème des accroissements finis, on a un $c \in]g(x), u_n(x)[$ tel que

$$|\varphi(u_n(x)) - \varphi(g(x))| = \varphi'(c)|u_n(x) - g(x)|.$$

Par 6d, on a $\varphi'(x) \leqslant \frac{2}{3}$, et on retrouve le résultat demandé.

6.4. En utilisant l'inégalité de la question précédente, on montre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(x) - g(x) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n (x - g(x)) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n a.$$

La borne supérieure est donc inférieure à $\left(\frac{2}{3}\right)^n a$.

6.5. On part de l'expression de gauche :

$$\begin{aligned}(t-g(x))^2\frac{2t+g(x)}{3t^2+1} &= \frac{g(x)^3 - 3t^2g(x) + 2t^3}{3t^2+1}\\ &= \frac{x - g(x) - 2t^2g(x) + 2t^3}{3t^2+1}\\ &= \varphi(t) - g(x)\end{aligned}$$

Soit $\psi : t \mapsto \frac{3t}{3t^2+1}$. Alors ψ est dérivable, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(t) = \frac{3-9t^2}{(3t^2+1)^2}.$$

Ainsi, la fonction ψ est décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ et croissante entre $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Elle atteint ainsi son maximum en $\frac{1}{\sqrt{3}}$, qui vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On a de plus $\psi(t) \geqslant 0$ pour $t \geqslant 0$.
Si $t \in [g(x), x]$, on a alors $2t + g(x) \leqslant 3t$, et par 7e et l'étude de ψ, on a

$$0 \leqslant \varphi(t) - g(x) \leqslant (t - g(x))^2 \psi(t) \leqslant (t - g(x))^2 \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6.6. En appliquant le résultat précédent en $t = u_n(x)$, on obtient

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - g(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(u_n(x) - g(x))^2.$$

Une récurrence immédiate montrer alors que

$$0 \leqslant u_n(x) - g(x) \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2^n - 1} (x - g(x))^{2^n}.$$

Or $x - g(x) = g(x)^3 \leqslant u_n(x)^3$, et on trouve alors le résultat demandé.

Exercice 2. Des sommes de racines n-ièmes

1. On note que si $j = 0$ ou $j = n$, on a bien $\omega^j = 1$. Réciproquement, on a

$$\omega^j = 1 \Leftrightarrow \frac{2j\pi}{n} = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

et donc comme la fraction est entre 0 et 2π,

$$\omega^j = 1 \Leftrightarrow \frac{2j\pi}{n} = 0 \text{ ou } 2\pi.$$

Le premier cas donne $j = 0$, le second $j = n$.

2. Faisons à part les cas $j = 0$ et $j = n$. Dans ce cas, tous les termes de la somme font 1, et donc la somme vaut n.

Supposons maintenant que $j \in \{1, \dots, n-1.\}$. Alors $\omega_j \neq 1$, et on peut appliquer la formule de la somme des termes d'une suite géométrique.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^j\right)^k &= \frac{1 - \omega^{nj}}{1 - \omega^j} \\ &= 0\end{aligned}$$

car $\omega^n = 1$.

3. On applique la formule de Newton :

$$\left(z + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \omega^{jk} z^{n-k}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\left(z+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\omega^{jk}z^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{j}\omega^{jk}z^{n-k} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^{n-j}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{jk} \\
&= z^n n + n \\
&= n(z^n+1)
\end{aligned}$$

4. **4.1.** On factorise l'angle moitié :

$$\begin{aligned}
1+e^{\frac{2ik\pi}{n}} &= e^{0i}+e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&= e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{-\frac{ik\pi}{n}}+e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{\frac{ik\pi}{n}}
\end{aligned}$$

4.2. On applique la formule $(\star)$ pour $z=1$.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = 2n.$$

D'un autre côté, avec la question précédente

$$\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = 2^n\cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{ik\pi} = (-1)^k 2^n\cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Finalement, la somme désirée vaut $\frac{2n}{2^n}=\frac{n}{2^{n-1}}$.

5. **5.1.** Comme précédemment, on utilise la méthode de l'angle moitié.

5.2. On applique la formule pour $z=e^{i\pi/n}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\pi/n}+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = n(e^{i\pi}+1)=0.$$

D'un autre côté, avec la question précédente,

$$\left(e^{i\pi/n}+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = 2^n\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}} = (-1)^k i 2^n\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right).$$

La somme cherchée vaut donc 0.