Agro TB 2013

Exercice : Étude d'une suite numérique

1. **1.1.** Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ P_n la proposition « $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \mathrm{d}t$ ».

- On a bien P_0 en calculant directement l'intégrale.
- Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose P_n.
  Soient u et v les deux fonctions définies sur le segment $[0,1]$ par $u(t) = (1-t)^{n+1}$ et $v(t) = e^t$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc par théorème d'intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t \mathrm{d}t &= \int_0^1 u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\ &= -1 \ + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^t \mathrm{d}t \\ &= u_{n+1}\end{aligned}$$

Finalement, par récurrence, on a bien le résultat voulu.

1.2. Par positivité de l'intégrale, on a bien la positivité de la suite u. De plus, la suite $((1-t)^n e^t)$ étant décroissante pour tout $t \in [0,1]$, par croissance de l'intégrale, la suite u est décroissante.

Ainsi, la suite u est décroissante et minorée, donc converge par théorème de la limite monotone.

1.3. Commençons par noter que $\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.
Ensuite, pour $t \in [0,1]$, on a

$$(1-t)^n \leqslant (1-t)^n e^t \leqslant (1-t)^n e.$$

Par croissance de l'intégrale et la remarque précédente, on a bien l'inégalité voulue.

1.4. Par théorème d'encadrement des limites, on a ainsi $\lim u_n = 0$.

2. **2.1.** Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ P_n la proposition « $u_n = n!(e - S_n)$ ».

- On a $u_1 = e - 2 = 1!(e - S_1)$. D'où P_1.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose P_n. Alors

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= (n+1)u_n - 1 \\ &= (n+1)!(e - S_n) - 1 \\ &= (n+1)!\left(e - S_n - \frac{1}{(n+1)!}\right) \\ &= (n+1)!(e - S_{n+1})\end{aligned}$$

  On a bien P_{n+1}.

Par récurrence, on a donc bien le résultat voulu.

2.2. Il est clair que la suite S est croissante, et que la suite $S - S'$ converge vers 0. Montrons alors que la suite S' est décroissante. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
S'_{n+1} - S'_n &= S_{n+1} - S_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\
&= \frac{n+1+1-(n+1)^2}{(n+1)(n+1)!} \\
&= \frac{-n^2-n+1}{(n+1)(n+1)!} \\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

car $n \geqslant 1$.

Ainsi, les deux suites sont bien adjacentes.

2.3. Par théorème des suites adjacentes, elles convergent donc bien toutes les deux vers la même limite.

2.4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \frac{1}{n!}u_n - e,$$

et comme la suite u converge vers 0, les suites S et S' convergent vers e.

2.5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $e - S_n = \frac{1}{n!}u_n$. Ainsi, par la question 1.3

$$\frac{1}{n!(n+1)} \leqslant e - S_n \leqslant \frac{e}{n!(n+1)}.$$

En notant que $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$, on obtient la première inégalité.

La suite S' est décroissante (q. 2.2), et on a pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $S'_n \geqslant e$. On en déduit alors

$$\frac{1}{nn!} = S'_n - S_n \geqslant e - S_n,$$

et on obtient la seconde inégalité.

2.6. On peut alors encadrer $nu_n = (n+1)!(e - S_n)$:

$$1 \leqslant nu_n \leqslant \frac{n+1}{n}.$$

Par théorème d'encadrement des limites, la suite (nu_n) converge bien, vers 1.

Exercice : Faire le bon pari

1. D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(D_1) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(D_2) = \frac{2}{3}$. Les événements D_1 et D_2 sont non vides, disjoints, et recouvrent l'univers. Ils forment donc un système complet d'événements.

2. Le premier dé ayant quatre faces rouges, on a $\mathbb{P}_{D_1}(R_n) = \frac{2}{3}$. De même, $\mathbb{P}_{D_2}(R_n) = \frac{1}{3}$.

3. L'ensemble $\{D_1, D_2\}$ est un système complet d'événements, donc par formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_1) &= \mathbb{P}_{D_1}(R_1)\mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}_{D_2}(R_1)\mathbb{P}(D_2) \\
&= \frac{1}{3}\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3} \\
&= \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

4. Une fois le dé choisi, les lancers sont indépendants, et donc

$$\mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}_{D_1}(R_1)\mathbb{P}_{D_1}(R_2).$$

Il en est de même pour la probabilité $\mathbb{P}_{D_2}$.

On a alors par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) &= \mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap R_2)\mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}_{D_2}(R_1 \cap R_2)\mathbb{P}(D_2) \\
&= \mathbb{P}_{D_1}\mathbb{P}_{D_1}(R_1)\mathbb{P}_{D_1}(R_2) + \ \mathbb{P}_{D_2}\mathbb{P}_{D_2}(R_1)\mathbb{P}_{D_2}(R_2) \\
&= \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3} \\
&= \frac{6}{27}
\end{aligned}$$

5. Pour les probabilités $\mathbb{P}_{D_1}$ et $\mathbb{P}_{D_2}$, les événements R_i sont mutuellement indépendants, et on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) &= \mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)\mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}_{D_2}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)\mathbb{P}(D_2) \\
&= \mathbb{P}_{D_1}\mathbb{P}_{D_1}(R_1)\mathbb{P}_{D_1}(R_2)\cdots\mathbb{P}_{D_1}(R_n) + \ \mathbb{P}_{D_2}\mathbb{P}_{D_2}(R_1)\mathbb{P}_{D_2}(R_2)\cdots\mathbb{P}_{D_2}(R_n) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^n \\
&= \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de probabilité conditionnelle, on a donc

$$\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_n}(R_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap \ R_{n+1})}{\mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_n)} = \frac{2^{n+1}+2}{3^{n+2}}\frac{3^{n+1}}{2^n+2} = \frac{2^{n+1}+2}{3(2^n+2)}.$$

6. Par la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{R_1\cap R_2}(D_1) &= \mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap R_2)\frac{\mathbb{P}(D_1)}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)} \\
&= \frac{4}{9}\frac{1}{3}\frac{27}{6} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

De la même façon, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_n}(D_1) &= \mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap \cdots \cap R_n)\frac{\mathbb{P}(D_1)}{\mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_n)} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3}\frac{3^{n+1}}{2^n+2} \\
&= \frac{2^n}{2^n+2}
\end{aligned}$$

7. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_n}(D_1) \geqslant \mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_n}(R_{n+1}) &\Leftrightarrow \frac{2^n}{2^n+2} \geqslant \frac{2^{n+1}+2}{3(2^n+2)} \\
&\Leftrightarrow 3 \times 2^n \geqslant 2^{n+1} + 2 \\
&\Leftrightarrow 2^n \geqslant 2
\end{aligned}$$

ce qui est vrai dès que $n \geqslant 1$. Ainsi, il vaut mieux parier sur le fait que le dé est D_1.

Problème : Différentes méthodes de calcul des puissances d'une matrice

1. 1.1. On a

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -A.$$

1.2. On a directement $M = 4A + I_3$.

1.3. On a :

- pour $n = 0$, $M^n = I_3 + 0A$;
- pour $n = 1$, $M^n = I_3 + 4A$;
- pour $n = 2$, $M^n = (I_3 + 4A)^2 = I_3 + 16A^2 + 8A = I_3 - 8A$.

1.4. Montrons par récurrence la propriété P_n : « il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I_3 + u_n A$ ».

- On a montré P_0 à la question précédente.
- Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose P_n. Alors

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n M \\ &= (I_3 + u_n A)((I_3 + 4A) \quad \text{par } P_n \\ &= I_3 + 4A + u_n A + 4u_n A^2 \\ &= I_3 + (4 - 3u_n)A \end{aligned}$$

On a donc bien P_{n+1} en posant $u_{n+1} = -3u_n + 4$.

Par récurrence, on a bien le résultat voulu.

1.5. 1.5.1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -3u_n + 3 = -3v_n.$$

Ainsi la suite v est géométrique, de raison -3.

1.5.2. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = (-3)^n v_0 = -(-3)^n.$$

1.5.3. On en déduit alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = v_n + 1 = 1 - (-3)^n.$$

1.6. On a donc pour tout entier n : $M^n = I_3 + (1 - (-3)^n)A$, donc

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 - 2(1 - (-3)^n) & 0 & -2(1 - (-3)^n) \\ 1 - (-3)^n & 0 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}.$$

2. Il suffit de prendre $J = \frac{1}{4}(M + 3I_3)$.

3. On a alors

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J.$$

Une récurrence immédiate permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = J$.

4. 4.1. Pour deux matrices carrées de même taille U et V qui commutent, on a pour tout entier $m \in \mathbb{N}$:

$$(U + V)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} U^k V^{n-k}.$$

4.2. Les matrices J et I_3 commutent, et on a donc par le binôme de Newton

$$\begin{aligned} M^n &= (4J - 3I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k J^k (-3)^{n-k} \\ &= (-3)^{n-k} I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) J \end{aligned}$$

par la question 2.2.

4.3. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k} - (-3)^n \\ &= 1-(-3)^n\end{aligned}$$

par le binôme de Newton.

4.4. On a donc par les questions 2.3.2 et 2.3.3 :

$$M^n = (-3)^n I_3 + (1-(-3)^n)J,$$

puis

$$M^n = \begin{pmatrix} 1-2(1-(-3)^n) & 0 & -2(1-(-3)^n) \\ 1-(-3)^n & 0 & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 0 & 2-(-3)^n \end{pmatrix}.$$