

Devoir surveillé 2

BCPST2

7 octobre 2023

Rappel : l'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet est constitué de deux problèmes totalement indépendants et comporte huit pages numérotées de 1 à 8.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1. Réversibilité d'une détente de gaz

En physique et en chimie, la question de la réversibilité d'une transformation est une question importante. La question peut se résumer à

Si une situation s'est produite à un moment donné, peut-elle se reproduire de façon identique ultérieurement ?

On considérera ici l'expérience suivante : un gaz se trouve dans une enceinte fermée. Au temps $t = 0$, on ouvre un trou dans l'enceinte, donnant sur une seconde enceinte vide au départ. Le gaz va alors se diffuser dans la seconde enceinte.

Les équations de la cinématique indiquent que chaque molécule peut aller dans l'une ou l'autre des enceintes, et la transformation serait alors réversible ; *a contrario*, les équations de la thermodynamique impliquent une augmentation de l'entropie, qui ne peut diminuer par la suite : la transformation est alors irréversible.

Ce problème est constitué de trois parties largement indépendantes.

Partie I. Approche thermodynamique

On considère la situation suivante : un certain nombre de molécules N se trouve dans une enceinte rigide.

On considère le temps discrétisé, commençant au temps $n = 0$. Au temps $n = 0$, on perce dans la paroi de l'enceinte un petit trou donnant sur une deuxième enceinte de même volume, initialement vide.

On notera alors u_n (resp. v_n) le nombre de molécules de gaz dans la première (resp. deuxième) enceinte au temps $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner les valeurs de u_0 et v_0 .
2. Justifier que la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante, puis exprimer u_n en fonction de v_n .

Les principes de la thermodynamique, sous certaines hypothèses qu'on n'exposera pas ici, permettent d'affirmer que le nombre de molécules passant de la première enceinte à la seconde (resp. de la seconde à la première) du temps n au temps $n + 1$, pour $n \in \mathbb{N}$, est proportionnel au nombre de molécules dans la première (resp. seconde) enceinte au temps n . Le coefficient de proportionnalité est supposé le même au cours du temps aussi bien la première enceinte vers la deuxième que de la deuxième vers la première, et sera noté K , $K \in]0, 1[$.

3. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = KN + (1 - 2K)u_n.$$

On admet désormais que ce réel vérifie $K \in]0, \frac{1}{2}[$.

4. Donner une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{N}{2} - \frac{N}{2}(1 - 2K)^n.$$

5. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
6. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, et qu'elles ont la même limite.
7. Déterminer la distribution des molécules au bout d'un temps très long.
8. Avec ce modèle, la transformation est-elle réversible ?

Partie II. Approche probabiliste

On rappelle le contexte de la partie précédente : N molécules sont présentes dans une enceinte, puis on perce au temps $t = 0$ un trou donnant dans une autre enceinte. On suppose que le temps est discrétisé : les instants seront numérotés $0, 1, 2, \dots$.

Les enceintes seront ici représentées par deux urnes : l'urne U contenant les molécules au départ, l'urne V étant vide au départ.

Les molécules sont supposées être numérotées de 1 à N . À chaque instant, on suppose qu'une et une seule molécule change d'urne (le trou est supposé assez petit pour ne laisser passer qu'une seule molécule).

Pour modéliser cette évolution, on tirera au hasard uniformément un entier entre 1 et N , et on supposera que c'est la molécule portant ce numéro qui change d'urne.

On notera alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- B_k la variable aléatoire comptant le nombre de boules dans l'urne U à l'instant k

- X_k le vecteur colonne $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(B_k = 0) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(B_k = N) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$.

II.A Le cas de trois boules

Dans cette partie, on suppose que l'urne U contient trois boules au départ, et l'urne V aucune. On a donc $N = 3$.

9. Expliciter le vecteur colonne X_0 .

10. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier que

$$\mathbb{P}(B_{k+1} = 0) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(B_k = 1) \text{ et } \mathbb{P}(B_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(B_k = 0) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(B_k = 2).$$

11. En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = MX_k$, avec M la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Calculer alors les vecteurs X_1 et X_2 .

13. Soit S la matrice définie par $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donner S^2 . En déduire que S est inversible, et exprimer S^{-1} en fonction de S .

14. Justifier que la matrice $D = S^{-1}MS$ est diagonale, et expliciter ses coefficients.

15. En déduire une expression de X_k en fonction de k .

16. Calculer la limite de $\mathbb{P}(B_{2k} = 3)$ quand k tend vers l'infini.

17. Que peut-on en déduire, dans ce modèle, quant à la réversibilité de la détente de gaz ?

II.B Le cas de deux boules

On rappelle le contexte de la partie précédente : les enceintes sont représentées par des urnes U et V , et on suppose qu'à chaque instant, une et une seule molécule passe d'une urne à l'autre. Pour modéliser cette situation, on suppose les molécules numérotées de 1 à N , et on tire aléatoirement et uniformément un entier entre 1 et N ; c'est la molécule portant ce numéro qui changera d'urne.

Dans cette partie, on suppose que $N = 2$, c'est-à-dire que l'urne U contient deux boules au départ, et l'urne V aucune.

On cherche dans cette partie à déterminer le temps de retour moyen à l'état initial.

Soit alors $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$. On considère la variable aléatoire R_M comptant le nombre d'étapes jusqu'au premier retour à la situation initiale si ce retour arrive durant les $2M$ premiers tirages, et qui vaut 0 sinon. Formellement, on a donc pour $M \geq 1$:

$$R_M = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall k \in \llbracket 1, 2M \rrbracket, B_k < 2 \\ \min\{k \in \mathbb{N} \mid B_k = 2\} & \text{si non} \end{cases}.$$

Par exemple, si $B_0 = 2$, $B_1 = 1$, $B_2 = 0$, $B_3 = 1$, $B_4 = 0$, $B_5 = 1$, $B_6 = 2$, $B_7 = 1$ et $B_8 = 2$, on aura $R_3 = 6$ et $R_4 = 6$ mais $R_2 = 0$.

18. Calculer $\mathbb{P}(R_3 = i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

19. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq 2M$, on a

$$\mathbb{P}(R_M = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}} & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}.$$

20. En déduire que

$$\mathbb{E}(R_M) = \sum_{j=1}^M \frac{j}{2^{j-1}}.$$

21. Calculer la limite quand $M \rightarrow \infty$ de $\mathbb{E}(R_M)$. Que représente cette quantité ?

Partie III. Simulation informatique

III.A Simulation de l'expérience

On cherche à simuler l'expérience de la partie II, pour pouvoir étendre les résultats prouvés dans les parties II.A et II.B à des urnes contenant un plus grand nombre de boules.

On suppose que la bibliothèque `random` a été importée, sous le nom `rd`.

On suppose aussi que la variable `N`, représentant le nombre de boules, a été déclarée globalement.

22. Expliquer ce qu'est une variable globale en Python, et comment on peut la déclarer.

23. Par quel type représente-t-on les entiers en Python ?

24. Pour deux entiers `a` et `b`, expliquer ce que calcule la commande `rd.randint(a,b)`.

25. Écrire une fonction `trouve` prenant en paramètres une liste `U` et un entier `x` et renvoyant `True` si `x` est dans `U`.

26. En déduire une fonction `echange` prenant en paramètres deux listes `U` et `V` et un entier `x`, et qui renvoie les deux listes à la seule différence que l'entier `x` a changé de liste.

On suppose qu'une et une seule des deux listes contient l'entier `x`.

Si on a par exemple `U=[1,2,3]`, `V=[4,5,6]` et `x=1`, alors la fonction renverra `([2,3], [4,5,6,1])`.

27. Compléter les lignes 1, 6 et 7 de la fonction suivante pour qu'elle simule l'expérience de la partie II pendant K étapes.

```

1 def expe(U, V, K):
2     U = ...
3     V = []
4     result = [N]
5     for _ in range(K):
6         ...
7         ...
8         result.append(len(U))
9     return result
10

```

28. Quel module Python permet de tracer des courbes ? Comment peut-on l'importer ?

29. Donner alors une fonction permettant de tracer un graphique représentant le nombre de boules dans l'urne U en fonction du nombre d'étapes.

30. Dédire de la fonction `expe` de la question 27 une fonction Python simulant la variable aléatoire R_M , définie au début de la partie II.B.

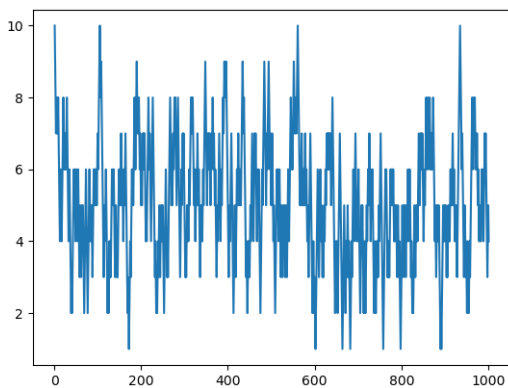
31. Écrire alors une fonction Python permettant d'estimer l'espérance de cette variable aléatoire.

III.B Interprétation des résultats

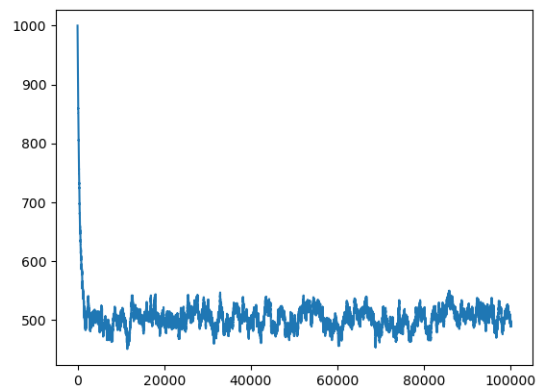
Grâce à la simulation de la partie précédente, on admet que les résultats précédents restent vrais dans le cas de N boules, $N \in \mathbb{N}^*$ quelconque :

- la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n = N)$ est non nulle
- le temps de retour moyen à la situation initiale est 2^N .

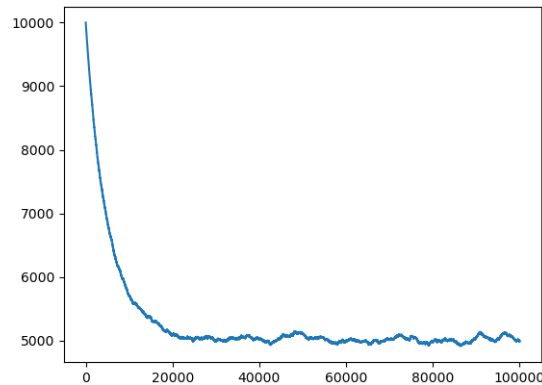
La fonction définie en question 29 permet d'obtenir les graphiques suivants, indiquant en abscisse le nombre d'étapes et en ordonnée le nombre de boules dans l'urne U .



$N = 10$



$N = 1000$



N=10000

32. Pour chacun de ces trois graphiques, indiquer en expliquant si la transformation semble plutôt réversible ou irréversible.
33. On considère dans cette fin de problème qu'il se produit un échange de molécule par nanoseconde. Comparer le temps moyen de retour à la situation initiale moyen dans le cas de $N = 10000$ molécules avec l'âge de l'univers, estimé à 5×10^{17} secondes.
On pourra utiliser l'approximation $2^{10} \approx 10^3$.
34. Expliquer alors le paradoxe entre les simulations et les résultats précédents.

Problème 2. Évolution d'une population de bactéries

Dans l'industrie agroalimentaire, un des principaux points à surveiller est la présence de la bactérie *Listeria monocytogene* dans les aliments. La présence de cette bactérie à des taux trop élevés peut amener à un rappel de produits, occasionnant une perte financière pour l'entreprise, ou si elle n'a pas été détectée, à la contamination de consommateurs du produit.

Dans ce problème, nous allons alors étudier différents modèles d'évolution de cette bactérie, pour tenter de prévoir le risque associé à la présence de *Listeria*.

On appellera alors N la fonction qui à un temps $t \in \mathbb{R}_+$ associe le nombre de bactéries à ce temps.

On notera N_0 le nombre de bactéries au temps $t = 0$: $N(0) = N_0 \geq 0$.

On appellera *point d'équilibre d'une équation différentielle* toute fonction constante solution de l'équation.

Partie I. Modèle de Malthus

Dans *An essay on the principle of population* en 1826, Thomas Malthus émet l'hypothèse qu'une population croît proportionnellement au nombre de personnes composant cette population.

On considère alors dans cette partie que la fonction N vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, N'(t) = \alpha N(t),$$

où α est un paramètre strictement positif.

1. Donner une expression de la fonction N en fonction de t et N_0 .
2. Ce modèle est-il réaliste? Pourquoi?

Partie II. Modèle de Von Bertalanffy

Pour palier au problème du modèle précédent, on considère un paramètre $K \geq N_0$ correspondant à la capacité limite de la population.

Karl Ludwig von Bertalanffy propose alors en 1938 le modèle suivant :

$$\forall t \geq 0, N'(t) = \alpha(K - N(t)),$$

avec $\alpha > 0$.

3. Ce modèle admet-il des points d'équilibre ?
4. Trouver une solution particulière à l'équation différentielle précédente, puis déterminer une expression de la fonction N en fonction de α , K , t et N_0 .
5. Dresser le tableau de variations de la fonction N en y faisant apparaître les limites aux bornes de l'intervalle de définition, puis dessiner l'allure de sa courbe représentative.
6. Que se passe-t-il s'il n'y a aucune bactérie au temps $t = 0$? Est-ce réaliste ?

Partie III. Modèle de Gompertz

Un autre modèle de croissance des populations est alors proposé par Benjamin Gompertz en 1825, prenant en compte la mortalité liée à l'âge.

Ce modèle peut être représenté par l'équation différentielle suivante, où $\alpha > 0$ et $K \geq N_0$ est la capacité limite :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, N'(t) = \alpha N(t) \ln \left(\frac{K}{N(t)} \right).$$

On suppose de plus que $N_0 > 0$.

7. Montrer que ce modèle admet un unique point d'équilibre, que l'on précisera.
8. On admet que la fonction N ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+ .
On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $u(t) = \ln \left(\frac{K}{N(t)} \right)$.
Montrer que u vérifie l'équation $\forall t \in \mathbb{R}_+, u'(t) = -\alpha u(t)$.
9. Trouver alors une expression de la fonction N en fonction t et de N_0 .
10. Dresser le tableau de variations de la fonction N en y faisant apparaître les limites aux bornes de l'ensemble de définition, puis dessiner l'allure de sa courbe.
11. On considère un gramme de nourriture contenant $N_0 = 10$ bactéries de *Listeria monocytogènes*. On donne pour cette bactérie $\alpha = 0,84$ (exprimé en h^{-1}) et $K = 16000$.
On estime qu'un gramme de cet aliment ne doit pas être consommé s'il contient plus de 1000 cellules de *Listeria monocytogène*.
Déterminer combien de temps on peut conserver cet aliment sans danger en utilisant le modèle de Gompertz.

Partie IV. Modèle avec substrat

Dans cette partie, on ne prend plus en compte la mortalité liée à l'âge des bactéries.

On considère maintenant que les bactéries ne peuvent se multiplier que si elles peuvent se nourrir d'un substrat. On notera maintenant $S(t)$ la quantité de substrat présente à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$, et on suppose qu'à l'instant initial, on a $S_0 = S(0)$ molécules de substrat.

Une bactérie ne pourra alors se multiplier qu'après avoir pu consommer $p \in \mathbb{N}^*$ molécules de substrat.

Dans ces conditions, on peut prouver que S et N vérifient les équations

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} S'(t) = -\frac{\alpha}{p}S(t)N(t) \\ N'(t) = \alpha S(t)N(t) \end{cases}$$

12. Justifier que la fonction $h : \begin{matrix} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & N(t) + pS(t) \end{matrix}$ est une fonction constante.

On notera λ la valeur de cette constante.

13. Montrer alors que la fonction N vérifie l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, N'(t) = \frac{\alpha}{p}\lambda \left(1 - \frac{N(t)}{\lambda}\right) N(t).$$

14. On admet que la fonction N ne s'annule pas, et on pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+ : v(t) = \frac{1}{N(t)}$.

Montrer que v vérifie une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.

15. En déduire une expression de $N(t)$ en fonction de $t \in \mathbb{R}_+$.

16. Quelle est la limite quand t tend vers l'infini des fonctions N et S ? Expliquer ces limites.