Devoir surveillé 2

BCPST2

5 octobre 2024

Rappel : l'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet est constitué de deux problèmes totalement indépendants et comporte six pages numérotées de 1 à 6.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1. Méthode de Newton pour les polynômes

Partie I. Théorème de Gauss-Lucas

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, dont toutes les racines sont réelles.

On note $x_1 < \ldots < x_r$ ces racines, de multiplicités respectives $n_1, \ldots, n_r$.

Par abus, on dira qu'un réel x est racine de d'un polynôme de multiplicité 0 s'il n'en est pas racine.

1. Montrer que pour tout i, x_i est racine de P' de multiplicité $n_i - 1$.
2. Rappeler le théorème de Rolle.
3. Montrer que pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$, il existe $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(y_i) = 0$.
4. En déduire que toutes les racines de P' sont dans l'intervalle $[x_1, x_r]$.

Partie II. La méthode de Newton

Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$ ayant toutes ses racines réelles ; on les note $\xi_1 < \cdots < \xi_r$, la plus grande racine ξ_r étant de multiplicité 1. P est donc de la forme

$$P = \prod_{i=1}^{r} (X - \xi_i)^{m_i},$$

les m_i étant des entiers non nuls, et $m_r = 1$.

Le but ce cette partie est de définir l'algorithme de Newton, permettant d'approcher la valeur de ξ_r.

5. (a) Montrer que pour $x > \xi_r$, $P(x) > 0$.
   (b) Soit α_r la plus grande racine réelle de P'. Montrer que $\alpha_r < \xi_r$.
   (c) En déduire que pour tout $x \geqslant \xi_r$, $P'(x) > 0$.
   (d) Montrer que pour tout $x \geqslant \xi_r$, $P''(x) > 0$.
6. On définit la fonction $f : \begin{array}{ccc} [\xi_r, \infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \frac{P(x)}{P'(x)} \end{array}$.
   (a) Montrer que f est bien définie, et calculer $f(\xi_r)$.
   (b) Calculer la dérivée de f, et en déduire son tableau de variation.
7. On définit la suite (x_n) par $x_0 > \xi_r$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

   (a) Montrer que cette suite est bien définie.
   (b) Montrer que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle converge.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi_r$.

Partie III. Implémentation en Python

En Python, les polynômes seront représentés comme des listes ; le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ sera représenté par la liste `[`a_0`,`a_1`,...,`a_d`]`.

8. Écrire une fonction `eval`, qui prend en paramètres un polynôme `P` et un réel `x`, et qui calcule l'image de `x` par `P`.

9. Écrire une fonction `derive`, qui prend en paramètre un polynôme `P`, et qui renvoie le polynôme dérivé de `P`.

10. Écrire une fonction Newton prenant en paramètres :

    - un polynôme `P` (qu'on supposera comme dans la partie précédente)
    - un entier `n`
    - un réel `x0` (qu'on supposera plus grand que la plus grande racine de `P`)

    et qui renvoie le n-ième terme de la suite (x_n) de la partie précédente.

Partie IV. Vitesse de convergence

On s'intéresse dans cette partie à la vitesse de convergence de la méthode de Newton. On reprend les notations des parties précédentes.

11. Montrer que pour tout $x > \xi_r$,
$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x - \xi_i}.$$
Indication : la fonction $\frac{P'}{P}$ *s'appelle* dérivée logarithmique *de* P.

12. Montrer que pour tout $x > \xi_r$,
$$\frac{P(x)P''(x) - P'(x)^2}{P(x)^2} = -\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x - \xi_i)^2}.$$

13. En déduire que pour tout $x > \xi_r$,
$$f'(x) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x-\xi_i)^2}}{\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x-\xi_i}\right)^2}.$$

14. Montrer alors que $\lim\limits_{x \to \xi_r} f'(x) = 0$.

15. Rappeler le théorème des accroissements finis, puis montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists y_n \in]\xi_r, x_n[,\ f(x_n) - f(\xi_r) = (x_n - \xi_r) f'(y_n).$$

16. Montrer que $f'(y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. En particulier, à partir d'un certain rang N, $|f'(y_n)| < \frac{1}{2}$.

17. Montrer que pour n assez grand,
$$|x_{n+1} - \xi_r| < \frac{1}{2}|x_n - \xi_r|,$$
et en déduire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \geqslant N$,
$$|x_n - \xi_r| < \frac{1}{2^n} M.$$

Partie V. La méthode de Héron

La méthode de Héron, ou méthode babylonienne, est un algorithme d'extraction de racine carrée d'un réel $a > 0$.

On prend dans cette partie $P = X^2 - a$.

18. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$\sqrt{x} < 1 + x.$$

19. Expliciter la suite (x_n) en fonction de a, en choisissant $x_0 = a + 1$.

20. Pour $a = 2$, calculer le terme x_3.

21. Écrire une fonction Python `heron`, prenant en paramètres un réel `a` et un réel `eps`, et qui renvoie le nombre d'étapes nécessaires pour avoir une approximation à `eps` près de $\sqrt{a}$ avec la méthode de Héron.

Problème 2.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante. Seul le résultat de la question 4 de la partie 1 est utilisé dans le partie 2 à l'endroit indiqué (à la question 8).

Partie I.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par :

$$\forall x \in [0,1[,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$.
2. (a) Soit $x \in]0,1[$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{d}t$$

où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième quand n est un entier naturel non nul de f et $f^{(0)} = f$.
Indication : dans l'hérédité, on effectuera une intégration par parties.

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, la dérivée $f^{(n)}$ de f est donnée par :

$$\forall x \in [0,1[,\ f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

(c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n\ \mathrm{d}t.$$

3. Soit x un réel de $]0,1[$.

(a) Montrer que la fonction $\varphi_x\ :\ t \mapsto \frac{x-t}{1-t}$ est décroissante sur l'intervalle $[0,x]$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n\ \mathrm{d}t \leqslant 2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right).$$

(c) On **admet** que :

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}.$$

Montrer que :

$$\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.$$

(d) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n\ \mathrm{d}t = 0.$$

4. Soit x un réel de $]0,1[$.

Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et que :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

Partie II.

Soit p un réel fixé dans l'intervalle $]0,1[$.

On considère une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\{-1,1\}$ mutuellement indépendantes, de même loi, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y_n=1)=p \text{ et } \mathbb{P}(Y_n=-1)=1-p.$$

Posons :

$$\begin{cases} X_0=0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ X_{n+1}=X_n+Y_n. \end{cases}$$

5. (a) Écrire une fonction Python `simulY(p)` qui prend en argument la valeur de p et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_0, c'est-à-dire qu'elle doit renvoyer 1 avec une probabilité p et -1 avec une probabilité $1-p$.

   (b) Écrire une fonction `marche(n,p)` prenant en argument le couple (n,p) et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X_n.

6. On note pour tout $n\in\mathbb{N}$: $Z_n=\dfrac{Y_n+1}{2}$.

   (a) Reconnaître la loi de Z_n pour tout $n\in\mathbb{N}$ et préciser son(ses) paramètre(s).

   (b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\sum\limits_{k=0}^{n-1} Z_k$?

   (c) Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: $X_n=2\sum\limits_{k=0}^{n-1} Z_k-n$.

7. On note pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p_n=\mathbb{P}(X_n=0$.

   Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$p_{2n+1}=0 \text{ et } p_{2n}=\binom{2n}{n}p^n(1-p)^n.$$

8. On considère dans cette question le cas où $p\neq\frac{1}{2}$.

   (a) Montrer que : $0<p(1-p)<\frac{1}{4}$.

   (b) Montrer à l'aide de la partie 1 que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_{2n}$ converge et déterminer sa somme.

9. On considère dans cette question le cas où $p=\frac{1}{2}$.

   (a) Montrer que : $p_{2n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

   (b) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_{2n}$ diverge et $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N} p_{2n}=+\infty$.