Devoir surveillé 2

BCPST2

7 octobre 2023

Problème 1. Réversibilité d'une détente de gaz

1. On a $u_0 = N$ et $v_0 = 0$.

2. Pour tout n, $u_n + v_n = N$. On a donc $u_n = N - v_n$.

3. On a donc $u_{n+1} = u_n + K(v_n - u_n)$ Ainsi,
$$u_{n+1} = u_n + K(N - 2u_n) = KN + u_n(1 \ - 2K).$$

4. On a donc pour tout n, $u_n = \frac{N}{2} + \frac{N}{2}(1 - 2K)^n$, puis le résultat demandé en utilisant la relation $v_n = N - u_n$.

5. Comme $0 < K < \frac{1}{2}$, on a $0 < 1 - 2K < 1$, et donc (u_n) est décroissante, et donc $(v_n) = (N - u_n)$ est croissante.

6. Comme $0 < 1 - 2K < 1$, la suite (u_n) converge vers $\frac{N}{2}$, et donc (v_n) aussi.

7. Au bout d'un long temps, il y aura environ la moitié des molécules dans chacune des enceintes.

8. Non, on tend vers l'équilibre sans jamais s'en éloigner.

9. On a donc $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[B_k = 0], \ldots, [B_k = 3]\}$, en notant que
$$\mathbb{P}_{[B_k=1]}(B_{k+1} = 0) = \frac{1}{3},\ \mathbb{P}_{[B_k=0]}(B_{k+1} = 1) = 1 \text{ et } \mathbb{P}_{[B_k=2]}(B_{k+1} = 1) = \frac{2}{3},$$
les autres probabilités conditionnelles étant nulles.

11. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[B_k = 0], \ldots, [B_k = 3]\}$.

12. On trouve alors $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

13. On trouve $S^2 = 8I_4$, donc S est inversible, d'inverse $\frac{1}{8}S$.

14. On trouve $D = \text{Diag}(-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$.

15. Une rapide récurrence montre alors que pour tout k,
$$X_k = (SDS^{-1})^k X_0 = SD^k S^{-1} X_0 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3\left(\frac{-1}{3}\right)^k + 1 + (-1)^{k+1} - \frac{1}{3^{k-1}} \\ 3(-1)^k + \left(\frac{-1}{3}\right)^{k-1} + 3 - \frac{1}{3^{k-1}} \\ -3(-1)^k + \left(\frac{-1}{3}\right)^{k-1} + 3 + \frac{1}{3^{k-1}} \\ (-1)^k + 3\left(\frac{-1}{3}\right)^k + 1 + \frac{1}{3^{k-1}} \end{pmatrix}.$$

16. Quand k tend vers l'infini, on a donc
$$\mathbb{P}(B_{2k} = 3) = \frac{1}{8}\left(1 + 3\left(\frac{1}{3^{2k}}\right) + 1 + \frac{1}{3^{2k-1}}\right) \to \frac{1}{4}.$$

17. Il est alors probable qu'on revienne à la situation initiale avec toutes les boules dans la même enceinte : la situation est réversible.

18. Il est clair que $\mathbb{P}(R_3 = 1) = \mathbb{P}(R_3 = 3) = \mathbb{P}(R_3 = 5) = 0$, l'urne U contenant un nombre impair de boules après un nombre impair de tirages. En dénombrant les tirages possibles, on a de plus $\mathbb{P}(R_3 = 2) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(R_3 = 4) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(R_3 = 6) = \frac{1}{8}$.

19. Soit $k \leqslant 2M$. Comme dit précédemment, si k est impair, on a $\mathbb{P}(R_M = k) = 0$. Si k est pair, on doit avoir les tirages suivants :
    - le premier tirage n'importe pas
    - si les deux boules sont dans V, peu importe le tirage
    - s'il y a une boule par urne, il faut choisir le numéro qui est dans V, avec probabilité $\frac{1}{2}$.

    Par probabilités composées, on retrouve le résultat demandé.

20. C'est la formule de l'espérance, avec un changement d'indice pair/impair.

21. On a donc une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2}$, et donc
$$\mathbb{E}(R_M) \to 4.$$
    Cette quantité représente le nombre moyen d'étapes nécessaires pour revenir à la situation initiale.

22. Une variable globale est une variable déclarée en dehors d'une fonction, qui peut être lue ou modifiée par les fonctions. On la déclare avec

```
        N = ...
        global N

```

23. Les entiers sont représentés par le type `int`.

24. Cette commande renvoie un entier aléatoire de l'intervalle $[\![a, b]\!]$, uniformément.

25. On propose le code

```
def trouve(U,x):
    return x in U

```

26. On propose

```
def echange(U,V,x):
    if trouve(U,x):
        U.remove(x)
        V.append(x)
    else:
        V.remove(x)
        U.append(x)
    return U,V

```

27. On complète

```python
def expe(U,V,K):
    U = list(range(1,N+1))
    V = []
    result = [N]
    for _ in range(K):
        x = rd.randint(1,N)
        U,V=echange(U,V,x)
        result.append(len(U))
    return result

```

28. On utilise le module `matplotlib.pyplot`, importé avec `import matplotlib.pyplot as plt`.

29. On propose

```python
def ehrenfest(K):
    abs = list(range(1,K+1))
    ord = expe(U,V,K)
    plt.plot(abs,ord)
    plt.show()

```

30. On évite le calcul des $2M$ étapes :

```python
def R(M):
    U = list(range(1,N+1))
    V = []
    i = 0
    for _ in range(2*M):
        i+=1
        x = rd.randint(1,N)
        U,V=echange(U,V,x)
        if len(U)==N:
            return i
    return 0

```

31. On répète un grand nombre de fois l'opération :

```python
def ER(M,k=1000):
    e = 0
    for _ in range(k):
        e += R(M,N)/k
    return e

```

32. On voit que pour un grand nombre de boules (graphiques $N = 1000$ et $N = 10000$), le nombre de boules dans U semble se stabiliser autour de $\frac{N}{2}$ boules, comme vu dans la première partie.

    En revanche, pour un plus petit nombre de boule (graphique $N = 10$), la situation semble plus se rapprocher la modélisation de la seconde partie.

33. Dans le cas $N = 10$, on voit que le retour à la situation initiale se produit plusieurs fois : la situation est réversible.

    Dans les deux autres cas, on a de légères fluctuations autour de $\frac{N}{2}$, mais la courbe ne s'approche jamais du retour à la situation initiale : la situation semble irréversible.

34. Le temps de retour moyen à la situation initiale est donc de $2^{10000} = \left(2^{10}\right)^{1000} \approx 10^{3000}$ ns, qui est très largement supérieur à l'âge de l'univers 5×10^{26} ns.

35. S'il est théoriquement possible de revenir à la situation initiale, le temps d'attente moyen pour voir cette situation est beaucoup trop grand pour l'observer en pratique.

Problème 2. Évolution d'une population de bactéries

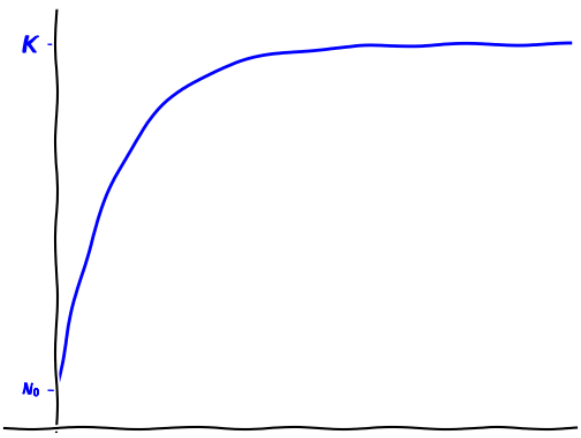
1. C'est une équation différentielle homogène linéaire du premier ordre à coefficients constants, on a donc directement $\forall t \geqslant 0,\ N(t) = N_0 e^{\alpha t}$.

2. On arrive rapidement à une explosion du nombre de bactérie, qui tend rapidement vers l'infini : c'est impossible en pratique.

3. Ici, le second membre de l'équation est non nul, et on trouve

$$\forall t \geqslant 0,\ N(t) = K + (N_0 - K)e^{-\alpha t}.$$

4. La fonction est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$, vaut N_0 en 0 et tend vers K en $+\infty$.



5. Supposons qu'on ait un point d'équilibre N. On aurait alors $0 = \alpha(K - N)$, et donc $N = K$.
   La fonction $N = K$ est bien un point d'équilibre.

6. Si $N_0 = 0$, la population de bactéries augmente quand même, ce qui est impossible biologiquement.

7. Supposons qu'on a un point d'équilibre N. Alors

$$0 = \alpha N \ln\left(\frac{K}{N}\right),$$

   et donc $N = K$, puisqu'on a supposé $N_0 > 0$.
   Réciproquement, K est bien un point d'équilibre.

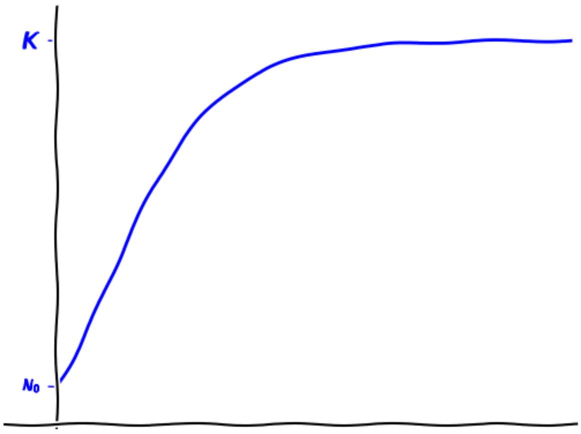
8. La fonction u est bien définie et dérivable, et pour tout $t \geqslant 0$,

$$u'(t) = -\frac{N'(t)}{N(t)} = -\alpha u(t).$$

9. On a alors $u(t) = \ln\left(\frac{K}{N_0}\right) e^{-\alpha t}$, et donc

$$N(t) = Ke^{-u(t)} = Ke^{\ln\left(\frac{N_0}{K}\right)e^{-\alpha t}}.$$

10. Cette fonction est croissante, et tend vers N_0 en 0 et K en $+\infty$.



11. Soit $m = 1000$. On a

$$N(t) = m \Leftrightarrow t = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\ln\left(\frac{m}{K}\right)}{\ln\left(\frac{N_0}{K}\right)} \right)$$
$$\Leftrightarrow t \approx 1,165$$

On pourra conserver cet aliment environ 1h10.

12. Cette fonction est dérivable, de dérivée nulle ; elle est constante.

13. On a donc $S(t) = \frac{1}{p}(\lambda - N(t))$, et on retrouve l'expression demandée.

14. On a alors

$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{-N'(t)}{N(t)^2} \\ &= \frac{-\frac{\alpha}{p}\lambda\left(1 - \frac{N(t)}{\lambda}\right)}{N(t)} \\ &= -\frac{\alpha\lambda}{p}\left(v(t) - \frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

La fonction v est donc solution de

$$y' + \frac{\alpha\lambda}{p} y = \frac{\alpha}{p}.$$

15. On a alors $v(t) = \frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\frac{\alpha\lambda}{p}t}$, et on retrouve N.

16. Quand $t \to \infty$, la fonction N tend donc vers λ, et donc la fonction S vers 0 : tout le substrat est consommé, et les bactéries ne se multiplient plus.