Devoir surveillé 2

BCPST2

5 octobre 2024

Problème 1. Méthode de Newton pour les polynômes

1. Si $n_i = 1$, alors par définition, x_i n'est pas racine de P'. Si $n_i > 1$, alors on peut écrire $P = (X - x_i)^{n_i} Q$, où Q est un polynôme.

   Alors $P' = (X - x_i)^{n_i - 1} R$, où $R = m_i Q + (X - x_i) Q'$, et donc x_i est bien racine de P' de multiplicité $n_i - 1$.

2. Cf cours.

3. C'est directement le théorème de Rolle : la fonction P est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$, et $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$.

   Il existe donc un y_i strictement entre x_i et x_{i+1} tel que $P(y_i) = 0$.

4. Toutes les racines de P sont réelles, et donc $\sum n_i = \deg(P)$.

   Dans la question 1, on a trouve $\sum n_i - 1 = \deg(P) - r$ racines (comptées avec multiplicité), et dans la question 3, au moins $r - 1$. On a donc $\deg(P) - 1 = \deg(P')$ racines pour P', et on les a donc trouvées ; elles sont bien dans l'intervalle demandé.

5. (a) Supposons un court instant qu'il existe $c > \xi_r$ tel que $P(c) < 0$. Alors, par continuité de P, puisqu'elle ne s'annule pas après ξ_r, on a $\forall x \geqslant c,\ P(x) < 0$ et donc $\lim\limits_{x \to \infty} P(x) \leqslant 0$, ce qui est impossible.

   (b) D'après le théorème de Gauss-Lucas, on sait que $\alpha_r \leqslant \xi_r$. Or ξ_r est racine de P de multiplicité 1, et donc n'est pas racine de P'.

   Donc $\xi_r > \alpha_r$.

   (c) Par la même preuve qu'en 5a, si $x \geqslant \xi_r$, alors $x > \alpha_r$, et donc $P'(x) > 0$.

   (d) Là encore, on sait que si $x \geqslant \xi_r$, alors $x \geqslant \alpha_r$, et donc x est plus grand que la plus grande racine de P'' ; on a bien $P''(x) \geqslant 0$.

6. (a) La fonction f est bien définie d'après la question 5c, et on a $f(\xi_r) = \xi_r$.

   (b) f est bien dérivable, car $x \mapsto x$, P et P' le sont, et P' ne s'annule pas. On a alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{P'(x)^2 - P(x)P''(x)}{P'(x)^2} \\ &= \frac{P(x)P''(x)}{P'(x)^2} \end{aligned}$$

   D'après la question 5, cette dérivée est strictement positive sur $]\xi_r, \infty[$, et donc f est strictement croissante.

7. (a) On veut montrer que pour tout n, $x_n > \xi_r$. Montrons-le par récurrence.

   - On a bien $x_0 > \xi_r$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $x_n > \xi_r$. Alors $f(x_n) > f(\xi_r)$ par stricte croissance de f, et donc $x_{n+1} > \xi_r$.

Par récurrence, la suite est bien définie.

(b) On a donc

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}.$$

Or $x_n > \xi_r$, et donc $P(x_n) > 0$ et $P'(x_n) < 0$. Donc $x_{n+1} < x_n$.
La suite est donc décroissante. Puisqu'elle est minorée par ξ_r (question 7a), on peut en déduire qu'elle converge.

(c) La limite ℓ est donc un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$. On a donc $P(\ell) = 0$, et comme $\ell \geqslant \xi_r$, on a nécessairement $\ell = \xi_r$.

8,9,10. On peut prendre

```
def eval(P,x):
  Px=0
  for i in range(len(P)):
    Px += P[i]*(x**i)
  return Px

def derive(P):
  Pp = []
  for i in range(1,len(P)):
    Pp.append(i*P[i])
  return Pp

def newton(P,n,x0):
  Pp = derive(P)
  f = lambda x: x - eval(P,x)/eval(Pp,x)
  x = x0
  for i in range(n):
    x = f(x)
  return x
```

11. On note que pour $x > \xi_r$, $P(x) > 0$. On peut donc calculer

$$\ln\left(P(x)\right) = \sum_{i=1}^{r} m_i \ln(x - \xi_i).$$

En dérivant cette relation, on obtient le résultat voulu.

12. Il suffit de dériver la relation précédente.

13. On a vu que $f' = \frac{PP''}{P'^2}$, et donc d'après la question précédente,

$$f'(x) = \frac{P(x)P''(x) - P'(x)^2}{P(x)^2}\,\frac{P(x)^2}{P'(x)^2} + 1,$$

qui donne le résultat voulu.

14. Quand $x \to \xi_r$, on a :

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x-\xi_i)^2} \sim \frac{1}{(x-\xi_r)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x-\xi_i} \sim \frac{1}{x-\xi_r}.$$

La fraction de la question précédente est donc équivalente à 1, et donc tend vers 1. Finalement, $f'(x) \to 0$.

15. Cf cours.

16. On sait que pour tout n, $\xi_r < y_n < x_n$. Or $x_n \to \xi_r$, et par théorème d'encadrement des limites, on a donc $y_n \to \xi_r$, et donc $f'(y_n) \to 0$ par caractérisation séquentielle de la limite.

17. Par la question 15, on a
$$x_{n+1} - \xi_r = f'(y_n)(x_n - \xi_r),$$
et donc
$$|x_{n+1} - \xi_r| = |f'(y_n)||x_n - \xi_r| < \frac{1}{2}|x_n - \xi_r|$$
d'après la question précédente, pour $n \geqslant N$.
On a donc, par récurrence immédiate
$$|x_n - r| < \frac{1}{2^{n-N}}|x_N - \xi_r|,$$
et on a donc le résultat en posant $M = 2^N|x_N - \xi_r|$.

18. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = 1 + x - \sqrt{x}$. Alors g est dérivable, et
$$\forall x > 0,\ g'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
g est donc décroissante sur $]0, \frac{1}{4}]$ et croissante sur $[\frac{1}{4}, \infty[$.
Or $g(0) = 1$, $g(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$, et $g(x) = x\left(\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$, et donc g est positive.
On a bien $1 + x > \sqrt{x}$.

19. On a donc $P = X^2 - a$ et $P' = 2X$. Donc $f(x) = x - \frac{x^2-a}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{a}{2x}$.
La suite est donc définie par
$$x_0 = a + 1 \text{ et } x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}.$$

20. On a donc $x_0 = 3$, $x_1 = \frac{3+\frac{2}{3}}{2} = \frac{11}{6}$, $x_2 = \frac{\frac{11}{6}+\frac{12}{11}}{2} = \frac{193}{132}$, et enfin
$$x_3 = \frac{\frac{193}{132} + \frac{264}{193}}{2} = \frac{72097}{50952}.$$

21. On propose

```python
from math import *

def heron(a,eps):
  P = [-a,0,1]
  f = lambda x: (x+a/x)/2
  x=a+1
  n=0
  while abs(sqrt(a)-x) > eps:
    x=f(x)
    n+=1
  return n
```

Problème 2.

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par inverse de fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui ne s'annule pas.

2. (a) Montrons-le donc par récurrence.
   - Pour $n = 0$, on a directement le résultat.

- Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose le résultat vrai.

  Posons alors $u : \begin{array}{ccc} [0,x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f^{(n+1)}(t) \end{array}$ et $v : \begin{array}{ccc} [0,x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{array}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,x]$, et par intégration par parties, on a donc

$$\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{d}t = f^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ \mathrm{d}t.$$

  On a alors bien le résultat voulu.

Par récurrence, on a bien la formule voulue.

(b) Montrons-le par récurrence.

- Pour $n = 0$, le résultat est évident.
- Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que la dérivée n-ième de f est donnée par la formule proposée. On a alors pour tout $x \in [0,1[$:

$$\begin{aligned} f(n+1)(x) &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(-n-\frac{1}{2}\right)(-1)(1-x)^{-n-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{2n+1}{2}\frac{2n+2}{2(n+1)}(1-x)^{-n-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!}(1-x)^{-n-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Par récurrence, on a bien le résultat voulu.

(c) On note par la question précédente que

$$f^{(k)}(t)\frac{1}{n!}\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Avec la question 2a, on a alors bien le résultat voulu.

3. (a) La fonction φ_x est dérivable sur $[0,x]$, et pour tout t dans cet intervalle,

$$\varphi_x'(t) = \frac{x-1}{1-t} \leqslant 0.$$

Ainsi, la fonction est bien décroissante.

(b) Par décroissance de la fonction φ_x, on a donc pour tout t

$$0 \leqslant \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n.$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n\ \mathrm{d}t &\leqslant x^n \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}t \\ &= 2x^n\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}-1\right) \end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} &= \frac{n+1}{2^{2n+2}}\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \\ &\sim \frac{n+1}{2^{2n+2}}\frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}2^{2n+2}(n+1)^{2n+2}e^{-2n-2}}{2\pi(n+1)(n+1)^{2n+2}e^{-2n-2}} \\ &\sim \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}} \\ &\sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

(d) D'après la question 3a, on a

$$0 \leqslant \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}2x^n(f(x)-1).$$

La partie de droite est équivalente, quand $n \to \infty$, à $\sqrt{\frac{n}{\pi}}x^n(f(x)-1)$, et donc tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ par croissance comparée, car $|x|<1$.
Par théorème d'encadrement des limites, on a bien la limite cherchée.

4. Par les questions 3d et 2c, la suite $\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)\right)$ converge vers 0.

   Ainsi, la série proposée converge bien, vers $f(x)$.

5. On propose les fonction

```python
def simulY(p):
    if rd.random() < p:
        return 1
    else:
        return -1

def marche(n,p):
    x = 0
    for _ in range(n):
        x += simulY(p)
    return x

```

6. (a) La variable Z_n prend les valeurs 1 ou 0 avec probabilités respectives p et $1-p$; elle suit donc une loi de Bernoulli de paramètre p.

   (b) Les Y_k étant indépendants, les Z_k le sont aussi. Ainsi, la variable $\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$ compte le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres n et p.

   (c) Une récurrence immédiate permet de montrer que $X_n = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k$.
   Comme $Y_k = 2Z_k - 1$, par linéarité de la somme, on a bien

$$X_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n.$$

7. Par la question 6c, on note donc que comme les Z_k sont à valeurs entières, X_n est toujours de même parité que n ; on a donc bien $p_{2n+1} = 0$.

   On a de plus

$$\begin{aligned} p_{2n} &= \mathbb{P}(X_{2n} = 0) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k = n\right) \\ &= \binom{2n}{n}p^n(1-p)^n \end{aligned}$$

   par la question 6b.

8. (a) Le trinôme $-p^2+p$ s'annule en 0 et 1, donc est positif entre ces valeurs, et atteint son maximum en $p=\frac{1}{2}$, qui vaut $\frac{1}{4}$. On a donc bien le résultat voulu.

(b) On pose $x = 4p(1-p) \in]0,1[$ d'après la question précédente.
Alors par la question 4, la série $\sum \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k = \sum p_{2k}$ converge, vers $\frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}} = \frac{1}{|1-2p|}$.

9. (a) On a alors $p_{2n} = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$. On a alors

$$p_{2n} \sim \frac{2\sqrt{\pi n} 4^n n^{2n} e^{-2n}}{2\pi n n^{2n} e^{-2n}} \frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

(b) Pour tout entier n non nul, on a $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme la série harmonique diverge, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge donc.
Ainsi, à nouveau avec le même théorème, la série à termes positifs $\sum p_{2n}$ diverge, vers $+\infty$.