Devoir surveillé 3

Angers Le Fresne : BCPST 2

25 Novembre 2023 : 8h – 10h

Dans tout le problème, k désigne un entier naturel non nul. On rappelle qu'une somme ayant un ensemble d'indice vide est nulle.

Dans la partie A, on considère deux fonctions réelles de deux variables réelles à partir desquelles on construit une fonction réelle d'une seule variable réelle dont on cherche par deux méthodes la limite en $\frac{1}{2}$. Cette dernière fonction est réutilisée dans la partie B où on étudie trois variables aléatoires. On calcule en particulier les espérances de deux d'entre elles. Enfin, dans la partie C, on s'intéresse à des probabilités de victoires dans des jeux de hasard.

Ces trois parties ne sont pas indépendantes.

Partie A : Étude de trois fonctions

On considère la fonction f_k définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,1[^2,\ f_k(x,y) = x^k y - x y^k.$$

De plus, g_k et φ_k désignent les fonctions définies par :

$$g_k(x,y) = \frac{f_k(x,y)}{x-y} \text{ et } \varphi_k(x) = g_k(x, 1-x).$$

1. Représenter à l'aide d'un schéma l'ensemble de définition de g_k notée $\mathcal{D}_1$ puis déterminer l'ensemble de définition de φ_k noté $\mathcal{D}_2$.

2. Dans cette question, on cherche par deux méthodes la limite de φ_k en $\frac{1}{2}$.

   (a) Calculer les dérivées partielles de f_k en tout $(x,y) \in]0,1[^2$ (on admet que f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[^2$) et en déduire le nombre dérivé de $x \mapsto f_k(x, 1-x)$ en $\frac{1}{2}$.

   (b) En déduire que :

   $$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \varphi_k(x) = \frac{k-1}{2^k}.$$

   (c) Démontrer que :

   $$\forall (x,y) \in \mathcal{D}_1,\ g_k(x,y) = xy \sum_{i=0}^{k-2} x^i y^{k-2-i}.$$

   (d) Retrouver alors la limite de φ_k en $\frac{1}{2}$.

3. Démontrer que φ_k est prolongeable par continuité en $\frac{1}{2}$. Dorénavant, on confond φ_k avec son prolongement par continuité.

4. Soit $x \in]0,1[$.

   (a) Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} \varphi_k(x)$.

   (b) Démontrer que $x(1-x)^{k-1} \leqslant \varphi_k(x)$ pour tout entier naturel $k \geqslant 2$.

   (c) Démontrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_{k+1}(x) = x(1-x)^k + x\varphi_k(x).$$

   (d) En déduire le sens de variation de la suite de terme général $\varphi_k(x)$, définie pour $k \in \mathbb{N}^*$.

   (e) Justifier que la série de terme général $\varphi_k(x)$ est convergente puis que :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(x) = 1.$$

Partie B : Trois variables aléatoires réelles

Soit une pièce de monnaie pouvant tomber sur pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et sur face avec la probabilité $1-p$. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer indéfiniment cette pièce. Ces lancers sont supposés mutuellement indépendants. En notant simplement `p` pour pile et `f` pour face, on obtient ainsi une suite à valeurs dans {`p`, `f`}. Par exemple :

`f f p p p f f p p f...`

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note enfin p_k l'événement « `p` apparaît au k-ième lancer » et f_k l'événement « `f` apparaît au k-ième lancer ».

5. On note T_{p} le numéro du lancer où apparaît « pile » pour la première fois (dans l'exemple proposé, on a $T_{\mathrm{p}} = 3$) et $T_{\mathtt{fp}}$ le numéro du lancer où apparaît le motif « face pile » pour la première fois (dans l'exemple proposé, on a également $T_{\mathtt{fp}} = 3$).

   (a) Justifier que T_{p} suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

   (b) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_{f_1}(T_{\mathtt{fp}} = k+1) = \mathbb{P}(T_{\mathrm{p}} = k)$.

   (c) A l'aide de la famille d'événements (p_1, f_1), démontrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T_{\mathtt{fp}} = k+1) = p(1-p)^k + p\mathbb{P}(T_{\mathtt{fp}} = k).$$

   (d) φ_k désignant la fonction introduite dans la partie précédente, en déduire que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(T_{\mathtt{fp}} = k\right) = \varphi_k(p).$$

6. (a) Justifier qu'il est presque certain que le motif « face pile » apparaît lors de l'expérience.

   (b) En distinguant le cas $p = \frac{1}{2}$ et le cas $p \neq \frac{1}{2}$, démontrer que :
$$\mathbb{E}\left(T_{\mathtt{fp}}\right) = \frac{1}{p(1-p)}.$$

7. On note T_{pp} le numéro du lancer où apparaît le motif « pile pile » pour la première fois (dans l'exemple proposé, on a $T_{\mathrm{pp}} = 4$).

(a) A l'aide de la famille d'événements $(f_1, p_1 \cap p_2, p_1 \cap f_2)$, démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T_{\text{pp}} = k+2) = (1-p)\mathbb{P}(T_{\text{pp}} = k+1) + p(1-p)\mathbb{P}(T_{\text{pp}} = k).$$

(b) Démontrer que le polynôme $X^2 - (1-p)X - p(1-p)$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2 appartenant à $]-1,1[$, puis exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 r_2$ en fonction de p.

(c) Justifier qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(T_{\text{pp}} = k) = \lambda r_1^k + \mu r_2^k.$$

(d) Calculer $\mathbb{P}(T_{\text{pp}} = 1)$ et $\mathbb{P}(T_{\text{pp}} = 2)$ et en déduire que $\lambda r_1 + \mu r_2 = 0$ et $\lambda + \mu = \frac{p}{1-p}$ et $\lambda r_2 + \mu r_1 = p$.

8. **(a)** On admet que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_{\text{pp}} = k) = 1$. Que peut-on en conclure ?

(b) Démontrer que :

$$\mathbb{E}\left(T_{\text{pp}}\right) = \frac{1+p}{p^2}.$$

Partie C : Deux jeux à pile ou face

Alice, Bérénice et Candice décident de jouer à pile ou face en reproduisant l'expérience aléatoire décrite dans la partie précédente.

9. Dans un premier temps, Alice joue contre Bérénice. Alice gagne la partie si « pile » apparaît strictement avant le motif « face pile » et Bérénice gagne la partie si le motif « face pile » apparaît avant ou au même instant que « pile ». On note A l'événement « Alice gagne » et B l'événement « Bérénice gagne ».

(a) Calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

(b) A quelle condition sur p, Bérénice a-t-elle une plus grande probabilité de victoire qu'Alice ?

10. Dans un second temps, Bérénice joue contre Candice. Bérénice gagne la partie si le motif "face pile« apparaît avant le motif »pile pile« et Candice gagne la partie si le motif »pile pile" apparaît avant le motif « face pile ». On note toujours B l'événement « Bérénice gagne » et C l'événement « Candice gagne ».

(a) Que peut-on dire de la famille d'événements (B, C) ?

(b) Démontrer que $\mathbb{P}(C) = p^2$ et en déduire à quelle condition sur p, Bérénice a une plus grande probabilité de victoire que Candice.

(c) Est-il possible que la victoire de Bérénice soit plus probable que la victoire de Candice alors que le temps d'attente moyen du motif « face pile » est supérieur au temps d'attente moyen du motif « pile pile » ?