Sujet B

Concours Agro-Véto

2011

A.1. (a) La variable X étant à image dans I_n, on a pour tout $k > n$: $\mathbb{P}(X = k) = 0$. Ainsi, on a pour tout t

$$g_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)t^k,$$

qui est bien une fonction polynomiale, de degré au plus n.

(b) Un polynôme es entièrement caractérisé par ses coefficients, et donc la donnée de g_X permet de connaître les $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in I_n$, et donc la loi de X.

A.2. (a) On a pour tout t

$$g_{Z_1+Z_2}(t) = \mathbb{E}\left(t^{Z_1+Z_2}\right) = \mathbb{E}\left(t^{Z_1}t^{Z_2}\right) = \mathbb{E}\left(t^{Z_1}\right)\left(t^{Z_2}\right) = g_{Z_1}(t)g_{Z_2}(t).$$

(b) Soit donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On a alors pour tout t

$$\begin{aligned} g_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (pt + 1 - p)^n \end{aligned}$$

(c) D'après la question précédente, on a donc $g_X(t) = (pt + 1 - p)^n$ et $g_Y(t) = (pt + 1 - p)^{n'}$. D'après la questions 2a, X et Y étant indépendantes, on a donc

$$g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t) = (pt + 1 - p)^{n+n'}.$$

$X + Y$ a donc la fonction génératrice d'une loi $\mathcal{B}(n + n', p)$, et donc suit cette dernière loi.

A.3. (a) On a facilement $g_{X_i} = \frac{1}{6}(X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6)$. On en déduit la fonction génératrice de la somme :

$$\begin{aligned} g_{X_1+X_2} &= \frac{1}{36}\left(X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6\right)\left(X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6\right) \\ &= \frac{1}{36}\left(X^2 + 2X^3 + 3X^4 + 4X^5 + 5X^6 + 6X^7 + 5X^8 + 4X^9 + 3X^{10} + 2X^{11} + X^{12}\right) \end{aligned}$$

On en déduit la loi de la somme, la probabilité $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k)$ étant le coefficient de X^k.

(b) i. On a alors

$$R = \frac{1}{11}\left(X^2 + X^3 + \cdots + X^{12}\right).$$

ii. Soit k entre 1 et 10. On a alors

$$\begin{aligned} R\left(e^{\frac{2ik\pi}{11}}\right) &= \frac{1}{11}\sum_{j=2}^{12} e^{\frac{2ijk\pi}{11}} \\ &= \frac{1}{11}\sum_{j=0}^{10} e^{\frac{2ijk\pi}{11}} \quad \text{en notant que } e^{\frac{2i11k\pi}{11}} = 1 \text{ et } e^{\frac{2i12k\pi}{11}} = e^{\frac{2ik\pi}{11}} \\ &= 0 \quad \text{par somme géométrique} \end{aligned}$$

Comme 0 est racine double de R, qui est de degré 12, on a bien toutes les racines complexes non réelles de R.

iii. On a $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0$, et donc 0 est racine du polynôme g_{Y_1} ; il existe donc $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $g_{Y_1} = XP$. De même, on peut écrire $g_{Y_2} = XQ$.
On a alors bien $R = X^2PQ$.

iv. Les racines de P sont donc parmi les $e^{\frac{2ik\pi}{11}}$, qui sont complexes non réelles. Or P est de degré impair, donc doit avoir au moins une racine réelle.
On a donc une contradiction, donc Y ne peut pas suivre une loi uniforme.

B.1. Soit $t \in [-1, 1]$. On a alors pour tout n $|a_n t^n| \leqslant a_n$, et la série $\sum a_n$ converge par définition de variable aléatoire.

Par théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum a_n t^n$ converge absolument.

Ainsi, la somme $\sum_{k=0}^{\infty} a_n t^n$ existe si $t \in [-1, 1]$.

On a alors

$$g_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n = 1.$$

B.2. On fait la même preuve que précédemment

$$\mathbb{E}(t^{X_1+X_2}) = \mathbb{E}(t^{X_1})\mathbb{E}(t^{X_2}) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t).$$

B.3. (a) Soit $t \in [-1, 1]$. On a alors

$$\begin{aligned} g_X(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} p t^n \\ &= pt \sum_{n=0}^{\infty} (qt)^n \\ &= \frac{pt}{1 - qt} \end{aligned}$$

car $t \leqslant 1 < \frac{1}{q}$.

(b) Soit $t \in [-1, 1]$. On a alors

$$\begin{aligned} g_X(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda(t-1)} \end{aligned}$$

C.1. Une rapide récurrence à partir de la question **B.2** montre le résultat, les variables $\sum_{k=1}^{n} X_k$ et X_{n+1} étant indépendante par lemme de coalition.

C.2. L'ensemble $\{[N = n] \mid n \in I_s\}$ est un système complet d'événements, et la formule des probabilités totales montre la première égalité.

On a alors pour tous k et n : $[Y = k] \cap [N = n]) = ([S_n = k] \cap [N = n])$, et donc la seconde égalité.

C.3. Les variables N et S_n sont indépendantes, on a directement le résultat par définition de fonction génératrice.

C.4. On a alors pour tout t :

$$\begin{aligned}(h \circ f)(t) &= \sum_{n=0}^{s} \mathbb{P}(N = n)(f(t))^n \\ &= \sum_{n=0}^{s} \mathbb{P}(N = n)\psi_n(t) \quad \text{par } \mathbf{C.1} \\ &= \sum_{n=0}^{s} \mathbb{P}(N = n) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = k)t^k \\ &= g(t)\end{aligned}$$

en intervertissant les sommes, toutes les séries convergeant absolument.

C.5. On a donc dans ce cas $f(t) = \frac{pt}{1-qt}$ et $h(t) = \frac{p't}{1-q't}$.

On a donc par la généralisation de **C.4**,

$$\begin{aligned}g(t) &= \frac{p' \frac{pt}{1-qt}}{1 - q' \frac{pt}{1-qt}} \\ &= \frac{pp't}{1 - (q + q'p)t}\end{aligned}$$

Or on a $q + q'p = 1 - p + p(1 - p') = 1 - pp'$.

Ainsi, on reconnaît la fonction génératrice d'une loi géométrique de paramètre pp', donc Y suit cette loi.