Devoir surveillé 3

Angers Le Fresne : BCPST 2

25 Novembre 2023 : 8h – 10h

Partie A : Étude de trois fonctions

1. On a $\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in]0,1[^2 |\ x \neq y\}$, et donc

$$x \in \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow x \in]0,1[\text{ et } x \neq 1 - x \Leftrightarrow x \in]0,1[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

2. **(a)** On a pour $(x,y) \in]0,1[^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = kx^{k-1}y - y^k \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^k - ky^{k-1}x.$$

Par dérivation des fonctions composées, le nombre dérivée cherché est donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{k-1}{2^{k-1}}$$

(b) On note que

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{2}\frac{f_k(x,1-x) - f_k\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}},$$

et la limite cherchée est donc le nombre dérivé de la question précédente multiplié par $\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \varphi_k(x) = \frac{k-1}{2^k}.$$

(c) Soit $(x,y) \in \mathcal{D}_1$. On a alors

$$\begin{aligned}
xy\sum_{i=0}^{k-2} x^i y^{k-2-i} &= xy^{k-1}\sum_{i=0}^{k-2}\left(\frac{x}{y}\right)^i \\
&= xy^{k-1}\frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{k-1}}{1-\frac{x}{y}} \quad \text{car } \frac{x}{y} \neq 1 \\
&= \frac{xy^{k-1} - x^k}{1\frac{x}{y}} \\
&= g_k(x,y)
\end{aligned}$$

(d) On retrouve alors directement la limite de φ_k en $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{1}{2}} \varphi_k(x) &= \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{k-2}\frac{1}{2^{k-2}} \\
&= \frac{k-1}{2^k}
\end{aligned}$$

3. La fonction φ_k admet donc une limite finie en $\frac{1}{2}$, et donc est prolongeable par continuité en $\frac{1}{2}$.

4. **(a)** Si $x \neq \frac{1}{2}$, on a

$$\varphi_k(x) = \frac{x^k(1-x) - x(1-x)^k}{2x-1} \to 0$$

car $|x| < 1$ et $|1-x| < 1$.
Si $x = \frac{1}{2}$, alors la limite trouvée dans la question 2 montre que la limite cherchée est 0 aussi.
Finalement,

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0.$$

(b) D'après la question 2c, on a donc

$$\begin{aligned}
\varphi_k(x) &= x(1-x)\sum_{i=0}^{k-2} x^i(1-x)^{k-2-i} \\
&= x(1-x)(1-x)^{k-2} + x(1-x)\sum_{i=1}^{k-2} x^i(1-x)^{k-2-i} \\
&\geqslant x(1-x)^{k-1}
\end{aligned}$$

(c) Reprenons l'identité de la question précédente

$$\begin{aligned}
\varphi_{x+1}(x) &= x(1-x)(1-x)^{k-1} + x(1-x)\sum_{i=1}^{k-1} x^i(1-x)^{k-1-i} \\
&= x(1-x)^k + x(1-x)\sum_{i=0}^{k-2} x^{i+1}(1-x)^{k-1-i-1} \\
&= x(1-x)^k + x\varphi_k(x)
\end{aligned}$$

(d) On a donc pour tout k

$$\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) = x(1-x)^k + (x-1) = (1-x)\left(x(1-x)^{k-1} - \varphi_k(x)\right).$$

D'après la question 4b, la suite est donc décroissante.

(e) Réutilisons une identité montrée à la question précédente : pour tout k

$$\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) = x(1-x)^k + (x-1) = (1-x)\left(x(1-x)^{k-1} - \varphi_k(x)\right).$$

Sommons ces égalités pour $k = 1$ à n ; la somme de gauche est téléscopique, et donc

$$\varphi_{n+1}(x) - \varphi_1(x) = (1-x)\sum_{k=1}^{n} x(1-x)^{k-1} - \varphi_k(x),$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) = \frac{1}{1-x}\left(\varphi_1(x) - \varphi_{n+1}(x) + x(1-x)\sum_{k=1}^{n}(1-x)^{k-1}\right).$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}(1-x)^{k-1} = \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)} \to \frac{1}{x},$$

et $\varphi_{n+1}(x) \to 0$ d'après la question 4a.
Finalement, la somme cherchée converge, et

$$\lim \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) = \frac{1}{1-x}1 - x = 1.$$

Partie B : Trois variables aléatoires réelles

5. **(a)** L'obtention de p à un lancer donné suit une loi binomiale de paramètre p, et les lancers sont indépendants.
La variable T_p suit donc une loi géométrique de paramètre p.

(b) Si on a eu un f au premier lancer, alors la seule solution pour obtenir fp au $k+1$-ième lancer est de n'avoir obtenu que des f pour les k premiers lancers, et un pile.
Cet évènement a la même probabilité que celle de faire $k-1$ f puis un p, et donc

$$\mathbb{P}_{\mathtt{f}_1}(T_{\mathtt{fp}} = k+1) = \mathbb{P}(T_{\mathtt{p}} = k).$$

(c) La famille d'événements $(\mathtt{p}_1, \mathtt{f}_1)$ est un système complet d'événement, et on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{\mathtt{fp}} = k+1) &= \mathbb{P}_{\mathtt{f}_1}(T_{\mathtt{fp}} = k+1)\mathbb{P}(\mathtt{f}_1) + \mathbb{P}_{\mathtt{p}_1}(T_{\mathtt{fp}} = k+1)\mathbb{P}(\mathtt{p}_1)\\ &= (1-p)\mathbb{P}(T_{\mathtt{p}} = k) + p\mathbb{P}(T_{\mathtt{fp}} = k)\end{aligned}$$

puisque si on a eu p au premier lancer, alors pour avoir fp au $k+1$-ème lancer, il faut l'obtenir au bout du k-ième en comptant à partir du deuxième.
On retrouve alors le résultat demandé, car $T_{\mathtt{p}}$ suit une loi géométrique.

(d) Montrons par récurrence la propriété ψ_k : « $\mathbb{P}(T_{\mathtt{fp}} = k) = \varphi_k(p)$ ».

- On a bien ψ_1, puisqu'il est clair que $\mathbb{P}(T_{\mathtt{fp}} = 1) = 0$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$; on suppose ψ_k. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{\mathtt{fp}} = k+1) &= p(1-p)^k + p\mathbb{P}(T_{\mathtt{fp}} = k) \quad \text{par la question B1c}\\ &= p(1-p)^k + p\varphi_k(p) \quad \text{par } \psi_k\\ &= \varphi_{k+1}(p) \quad \text{par la question A4c}\end{aligned}$$

On a donc bien montré, par récurrence, que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T_{\mathtt{fp}} = k) = \varphi_k(p).$$

6. **(a)** Les événements $[T_{\mathtt{fp}} = k]$ étant incompatibles, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} T_{\mathtt{fp}} = k\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_{\mathtt{fp}} = k)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(p) \quad \text{par la question B1d}\\ &= 1 \quad \text{par la question A4ae}\end{aligned}$$

Ainsi, il est presque certain que le motif fp apparaisse.

(b) Si $p = \frac{1}{2}$, on a vu à la question A2b que $\varphi_k(\frac{1}{2}) = \frac{k-1}{2^k}$.
Ainsi, la série géométrique dérivée $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}(T_{\mathtt{fp}} = k)$ converge bien, vers $4 = \frac{1}{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}$.
Sinon, on a par définition de φ_k pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(T_{\mathtt{fp}} = k) &= \sum_{k=1}^{N} k\varphi_k(p)\\ &= \sum_{k=1}^{N} k\frac{p^k(1-p) - p(1-p)^k}{2p-1}\\ &= \frac{1}{2p-1}\left(p\sum_{k=1}^{N} kp^{k-1}(1-p) - (1-p)\sum_{k=1}^{N}(1-p)^{k-1}p\right)\\ &\xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{p}{1-p} - \frac{1-p}{p}\right) \quad \text{en reconnaissant les espérances de lois géométriques}\\ &= \frac{1}{p(1-p)}\end{aligned}$$

Dans les deux cas, la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}(T_{\mathtt{fp}} = k)$ converge absolument (les termes sont positifs), vers $\frac{1}{p(1-p)}$. La variable $T_{\mathtt{fp}}$ admet donc une espérance, qui vaut $\frac{1}{p(1-p)}$.

7. (a) La famille proposée est bien un système complet d'événements, et donc pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{\mathrm{pp}} = k+2) &= \mathbb{P}_{\mathtt{f}_1}(T_{\mathrm{pp}} = k+2)\mathbb{P}(\mathtt{f}_1) + \mathbb{P}_{\mathtt{p}_1\cap\mathtt{p}_2}(T_{\mathrm{pp}} = k+2)\mathbb{P}(\mathtt{p}_1 \cap \mathtt{p}_2) + \mathbb{P}_{\mathtt{p}_1\cap\mathtt{f}_2}(T_{\mathrm{pp}} = k+2)\mathbb{P}(\mathtt{f}_1 \cap \mathtt{f}_2)\\ &= (1-p)\mathbb{P}(T_{\mathrm{pp}} = k+1) + p^2 \times 0 + p(1-p)\mathbb{P}(T_{\mathrm{pp}} = k)\end{aligned}$$

le premier cas revenant à compter à partir du deuxième lancer, le deuxième étant impossible puisqu'on a déjà tiré deux p, et le dernier revenant à compter à partir du troisième lancer.

(b) Le discriminant du polynôme vaut $(1-p)^2 + 4p(1-p) = (1-p)(3p+1) > 0$. On a donc bien deux racines réelles distinctes.

Ensuite, on a $P(1) = p^2$ et $P(-1) = 2 - 2p + p^2 = (p-1)^2 + 1$, et donc $P(1)$ et $P(-1)$ sont strictement positifs. Ainsi, les racines r_1 et $r-2$ sont nécessairement entre ces points.

De plus, les relations coefficients-racines nous donne

$$r_1 + r_2 = 1 - p \text{ et } r_1 r_2 = -p(1-p).$$

(c) On reconnait dans le résultat de la question B3a une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont le polynôme caractéristique est $X^2 - (1-p)X - p(1-p)$. Ce polynôme ayant deux racines réelles distinctes, il existe deux constantes réelles λ et μ telles que

$$\forall jk \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T_{\mathrm{pp}} = k) = \lambda r_1^k + \mu r_2^k.$$

(d) Il est clair que $\mathbb{P}(T_{\mathrm{pp}} = 1) = 0$ et $\mathbb{P}(T_{\mathrm{pp}} = 2) = p^2$, et donc en reprenant l'expression précédente, on a

$$\lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \text{ et } \lambda r_1^2 + \mu r_2^2 = p^2.$$

On a donc $\lambda r_1^2 + \mu r - 1 r_2 = 0$, et par B3b,

$$\lambda r_1^2 = \mu p(1-p).$$

De même

$$\mu r_2^2 = \lambda p(1-p).$$

On a donc

$$p(1-p)(\lambda+\mu) = p^2, \text{ puis } \lambda + \mu = \frac{p}{1-p}.$$

De plus, on a $r_1 = 1 - p - r_2$ et $r_2 = 1 - p - r_1$ par B3b, et donc

$$\begin{aligned}0 &= \lambda r_1 + \mu r_2\\ &= (\lambda+\mu)(1-p) - \lambda r_2 - \mu r_1\end{aligned}$$

et on retrouve

$$\lambda r_2 + \mu r_1 = (\lambda+\mu)(1-p) = p.$$

8. (a) Les événements étant disjoints, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup T_{\mathrm{pp}} = k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_{\mathrm{pp}} = k) = 1.$$

Ainsi, il est presque certain qu'on obtiendra la suite pp.

(b) Les deux série $\sum k r_1^k$ et $\sum k r_2^k$ convergent comme séries géométriques dérivées, car r_1 et r_2 sont dans $]-1,1[$. On a

$$\sum_{k=1}^{\infty} k r_1^k = \frac{r_1}{(1-r_1)^2} \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} k r_2^k = \frac{r_2}{(1-r_2)^2}.$$

Ainsi, par linéarité, T_{pp} admet une espérance, et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_{\mathrm{pp}}) &= \frac{\lambda r_1}{(1-r_1)^2} + \frac{\mu r_2}{(1-r_2)^2} \\
&= \frac{\lambda r_1(1-r_2)^2 + \mu r_2(1-r_1)^2}{((1-r_1)(1-r_2))^2} \\
&= \frac{(\lambda r_1 + \mu r_2) - 2r_1r_2(\lambda+\mu) + r_1r_2(\lambda r_2 + \mu r_1)}{(1-r_1)^2(1-r_2)^2} \\
&= \frac{2p(1-p)\left(\frac{p}{1-p}\right) - p(1-p)p}{(-p(1-p)-(1-p)+1)^2} \\
&= \frac{1+p}{p^2}
\end{aligned}$$

Partie C : Deux jeux à pile ou face

9. (a) Si `p` sort au premier coup, Alice gagne. Sinon, `fp` sortira nécessairement avant ou au même moment que `p`. On a donc

$$\mathbb{P}(A) = p \text{ et } \mathbb{P}(B) = 1-p.$$

(b) Ainsi, Bérénice a une plus grande probabilité de victoire si et seulement si $p < \frac{1}{2}$.

10. (a) On a vu que les suites `fp` et `pp` arrivent de façon presque sûre, et ne peuvent arriver au même instant. Ainsi, (B, C) forme un système complet d'événement.

(b) On distingue deux cas :

- si le premier lancer donne `f` (probabilité $1-p$), alors Bérénice gagnera nécessairement, dès que le premier `p` apparaitra.
- si le premier lancer donne `p`, alors on distingue deux sous-cas :
  - si le deuxième lancer donne pile (probabilité p^2), alors Candice gagne.
  - si le deuxième lancer donne face (probabilité $p(1-p)$), alors on revient au premier cas, et Bérénice gagne.

Finalement, $\mathbb{P}(C) = p^2$.

Ainsi, Bérénice a une plus grande probabilité de gagner si et seulement si $p < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(c) D'après B2b et B4b, les temps d'attente moyens de `fp` et `pp` valent respectivement $\frac{1}{p(1-p)}$ et $\frac{1+p}{p^2}$.

Ainsi, pour $p > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0.6$, le temps d'attente de `fp` est strictement plus grand que celui de `pp`.

Mais d'après la question précédente, Bérénice a plus de chance de gagner dès que $p < \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7$.

Ainsi, pour p entre ces deux valeurs, *e.g.* $p = 0.65$, la victoire de Bérénice est pluys probable, mais le temps d'attente de `fp` est en moyenne plus long que celui de `pp`.