Devoir surveillé 4

Angers Le Fresne : BCPST2

13 Janvier 2024

Rappel : l'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet est constitué de deux problèmes totalement indépendants et comporte huit pages numérotées de 1 à 5.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$;
- on note θ un paramètre réel.

On rappelle que si V et W sont deux variables indépendantes de densités respectives f_V et f_W, alors $V+W$ est une variable à densité, dont une densité f_{V+W} est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{V+W}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t) f_W(x-t)\mathrm{d}t$.

Une démonstration probabiliste de la formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit h_n la fonction définie par : $\forall x \in [0,1],\ h_n(x) = ((1-x)e^x)^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^1 h_n(x)\mathrm{d}x$.

1. **(a)** À l'aide du changement de variable $u = n(1-x)$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_0^n u^n e^{-u}\mathrm{d}u$.

(b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $x + \ln(1-x) \leqslant -\frac{x^2}{2}$.

(c) En se référant à une densité de la loi normale centrée réduite, en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

2. On note h_n^* la restriction à l'intervalle $]0,1[$ de la fonction h_n.
On pose pour tout $x \in]0,1[$: $h_n^*(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2}H(x)\right)$ et $g(x) = (1-x)\ln(1-x) + x - \frac{x^2}{2}$.

(a) Montrer que H est prolongeable par continuité en 0. On note encore H la fonction ainsi prolongée.

(b) Montrer que la fonction g est strictement positive sur $]0,1[$.

(c) En déduire que la fonction H réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ sur $[1,+\infty[$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente de limite nulle telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\sqrt{n} = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < 1$.

(a) Donner un exemple de telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = H(u_n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

(c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'encadrement :

$$I_n \geqslant \int_0^{u_n} h_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\sqrt{nv_n}} \int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y.$$

(d) Déduire des questions **(c)** et **(c)** un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'une densité de S_n est donnée par

$$f_{S_n} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}.$$

On *admet* que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant n) = \frac{1}{2} \qquad (\star)$$

(b) Montrer la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

5. On veut vérifier l'égalité $(\star)$ grâce à Python.

(a) Quelle commande permet d'importer la module `random`, sous le nom raccourci `rd` ?
On suppose dans la suite que cette commande est exécutée. On suppose de plus qu'on a importé le module `numpy` sous le nom `np` et le module `matplotlib.pyplot` sous le nom `plt`.

(b) Que renvoie la commande `rd.random()` ? Quelle est la loi suivie par le résultat renvoyé ?

(c) Justifier que la fonction suivante permet de simuler une loi exponentielle de paramètre 1 :

```python
def expo():
    return -np.log(rd.random())

```

(d) Déduire de la fonction précédente une fonction prenant en paramètre un entier n et renvoyant une simulation de la variable S_n.

(e) Écrire une fonction prenant en paramètre un entier n et permettant d'estimer la probabilité $\mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant n)$.

(f) En déduire alors une fonction permettant de tracer une courbe représentant $\mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant n)$ en fonction de n.

Quelques propriétés de la loi de Cauchy

6. **(a)** Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$ de la fonction arctan.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $0 \leqslant \arctan(x) \leqslant x$.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

7. **(a)** Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+(x-\theta)^2} \end{array}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite du problème, on note X une variable aléatoire réelle de densité f. On dit que X suit une loi de Cauchy de paramètre θ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{C}(\theta)$.

(b) La variable X admet-elle une espérance ?

(c) Pour $\theta = 0$, tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

8. **(a)** On note F_X la fonction de répartition de X. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $F_X(x)$.

(b) Montrer que l'équation $F_X(x) = \frac{1}{2}$ d'inconnue x admet une unique solution que l'on déterminera.

La loi de la moyenne empirique

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $\varphi_{n,x}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{n,x}(t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+(x-nt)^2)}.$$

On admet l'existence d'un unique quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de réels indépendants de t pour lesquels on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{n,x}(t) = \frac{\alpha t + \beta}{1+t^2} + \frac{\gamma t + \delta}{1+(x-nt)^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\sigma_{n,x} = (x^2 + (n+1)^2)(x^2 + (n-1)^2)$.

On admet alors sans démonstration que :

$$\alpha = \frac{2nx}{\sigma_{n,x}},\ \beta = \frac{1+x^2-n^2}{\sigma_{n,x}},\ \gamma = -\frac{2n^3x}{\sigma_{n,x}} \text{ et } \delta = \frac{n^2(3x^2+n^2-1)}{\sigma_{n,x}}.$$

(a) Établir la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t)\mathrm{d}t$.

(b) À l'aide d'une primitive de la fonction $\psi_{n,x} \colon t \mapsto \frac{2t}{1+t^2} - \frac{2n(nt-x)}{1+(x-nt)^2}$, montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{n,x}(t)\mathrm{d}t = 0$.

(c) Établir la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t)\mathrm{d}t = \frac{(n+1)\pi}{x^2+(n+1)^2}$.

10. On pose $Y = X - \theta$. Pour n entier de N^*, soit $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que Y.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $W_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ et $\overline{Y_n} = \frac{W_n}{n}$.

(a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y. Quelle est la loi de Y ?

(b) Quelle est la fonction de répartition de W_2 ? En déduire la loi de $\overline{Y_2}$.

(c) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la loi de la variable aléatoire $\overline{Y_n}$.

(d) Énoncer la loi faible des grands nombres. S'applique-t-elle à la suite $(\overline{Y_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$? Pourquoi ?

11. On veut dans cette question confirmer le résultat trouvé à la question **(c)**. On suppose que les bibliothèques importées en question **5.** le sont toujours.

(a) Montrer que F_Y réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$, et expliciter sa fonction réciproque F_Y^{-1}.

(b) Montrer que si U suit une loi uniforme sur $]0,1[$, alors $F_Y^{-1}(U)$ suit la même loi que Y.

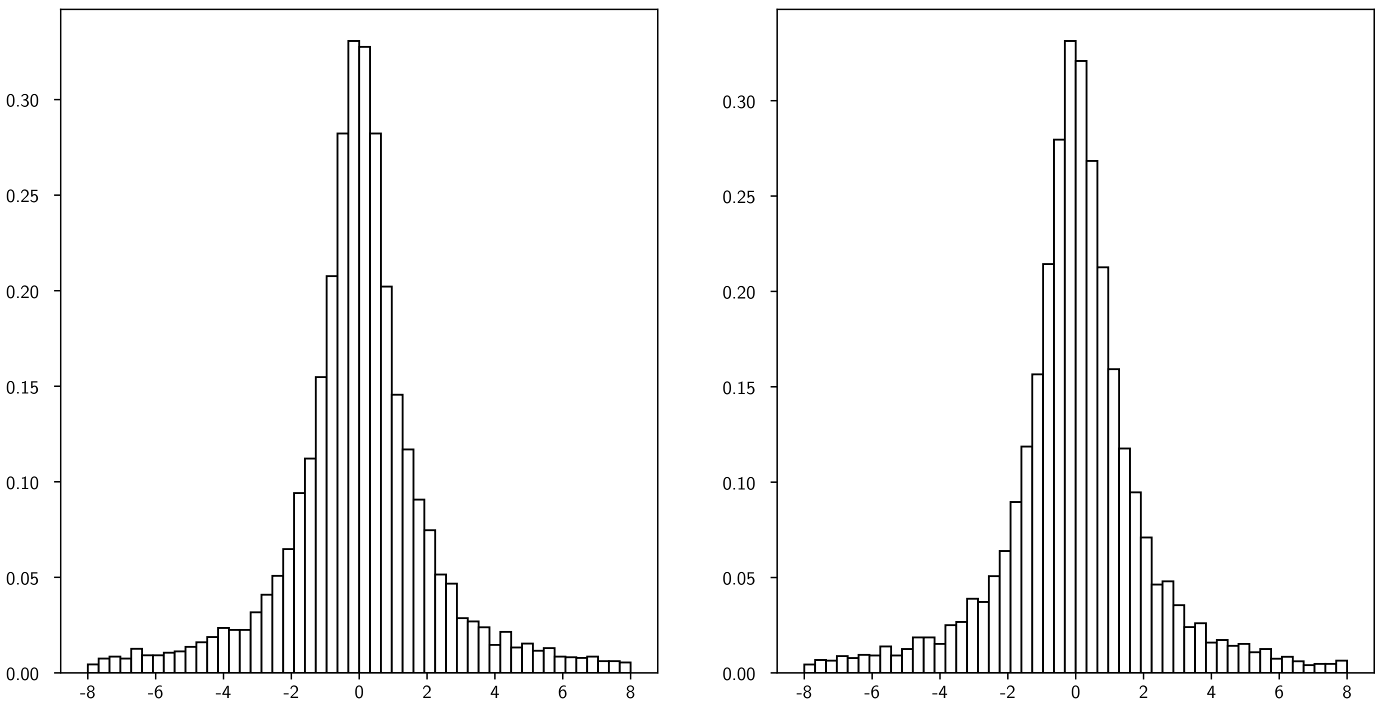
(c) Déduire de la fonction précédente une fonction Python permettant de simuler la variable Y.

(d) On rappelle que la commande `plt.hist(data,bins=N)` permet de tracer l'histogramme des valeurs contenues dans la liste `data`, l'axe des abscisses étant divisé en `N`.
Écrire une commande permettant de tracer l'histogramme correspondant à la réalisation de la loi de Y 10000 fois.

(e) Écrire alors une fonction permettant de tracer l'histogramme de la variable $\overline{Y_n}$.

(f) On obtient les histogramme suivants (à gauche pour l'histogramme trouvé en question **(d)** et à droite pour celui de la question **(e)**).

Que peut-on en conclure ?


0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8