Devoir surveillé 4

Angers Le Fresne : BCPST2

18 Janvier 2025
8h – 10h

Dans tout le problème λ désigne un réel strictement positif, n un entier naturel, p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $k \in [\![1, p]\!]$. Si X désigne une variable aléatoire à densité alors F_X désigne la fonction de répartition de X, f_X une densité de X et on note $\overline{F}_X$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\overline{F}_X(t) = 1 - F_X(t)$.

Dans la partie A, on étudie quelques propriétés classiques des lois exponentielles. La partie B est consacrée au calcul d'une limite de probabilité conditionnelle. Enfin, dans la partie C, on étudie la somme de certaines variables aléatoires. Ces parties peuvent être abordées indépendamment les unes des autres.

Des lois exponentielles

On considère p techniciens qui interviennent auprès d'une machine. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on note X_k la variable aléatoire donnant la durée (en heure(s)) de l'intervention du k-ième technicien. On admet que les variables aléatoires $(X_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$ sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre λ.

1. **(a)** Démontrer par récurrence sur n que la variable aléatoire X_k admet un moment à tout ordre n égal à :

$$m_n(X_k) = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

(b) Déterminer la nature et la somme de la série de terme général $\frac{1}{m_n(X_k)}$ (pour $n \in \mathbb{N}$).

2. On note $Y_p = \min(X_1, \ldots, X_p)$.

(a) Calculer $\overline{F}_{X_1}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) En considérant $\overline{F}_{Y_p}(t)$ (pour $t \in \mathbb{R}$), démontrer que la variable aléatoire Y_p suit une loi exponentielle de paramètre $p\lambda$.

(c) Exprimer $\mathbb{E}(Y_p)$ et $\mathbb{V}(Y_p)$ en fonction de λ.

3. On suppose, dans cette question uniquement, que $p = 2$ et que la durée moyenne de l'intervention du premier technicien est de deux heures. Calculer alors les probabilités ci-dessous :

(a) probabilité que la durée de l'intervention du second technicien soit inférieure ou égale à 2 heures.

(b) probabilité que le minimum des durées des interventions des deux techniciens soit inférieur ou égal à 1 heure sachant que la durée de l'intervention du second technicien est supérieure ou égale à 2.

(c) probabilité que le minimum des durées des interventions des deux techniciens soit inférieur ou égal à 1 heure sachant que la durée de l'intervention du second techniciens est inférieure ou égale à 2.

Calcul d'une limite d'une probabilité

1. On note $Z_2 = \max(X_1, X_2)$.

(a) Démontrer que la variable aléatoire Z_2 admet une densité que l'on exprimera à l'aide de densités de lois exponentielles.

(b) Démontrer que la variable aléatoire Z_2 admet une espérance et obtenir une égalité entre $\mathbb{E}(Y_2)+\mathbb{E}(Z_2)$ et $\mathbb{E}(X_1+X_2)$. Pouvait-on anticiper cette égalité ?

(c) Justifier enfin l'existence de $\mathbb{V}(Z_2)$ et la calculer.

2. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$.

(a) Calculer $\mathbb{P}(Z_2 \geqslant n+x)$ et démontrer que $\mathbb{P}(Z_2 \geqslant n+x)$ est équivalent (quand n tend vers $+\infty$) au terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial.

(b) Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_2 \geqslant n+x \mid Z_2 \geqslant n) = \mathbb{P}(X_1 \geqslant x).$$

(c) La formule précédente est-elle encore exacte si on remplace la variable aléatoire Z_2 par la variable aléatoire X_1 ?

Sommes de variables aléatoires

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\} \times \mathbb{R}$.

(a) Démontrer que la variable aléatoire aX_2+b admet une densité définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{aX_2+b}(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{a} e^{-\frac{\lambda}{a}(t-b)} & \text{si } t \geqslant b \\ 0 & \text{si non} \end{cases}.$$

(b) Démontrer que les variables aléatoires X_1 et aX_2+b sont indépendantes.

2. On note $T = X_1 + aX_2 + b$ et on rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités f_X et f_Y alors $X+Y$ est une variable aléatoire dont une densité est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\mathrm{d}t.$$

(a) Démontrer que T admet une densité définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_T(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1-a}\left(e^{-\lambda(x-b)} - e^{-\frac{\lambda}{a}(x-b)}\right) & \text{si } x \geqslant b \\ 0 & \text{si non} \end{cases}.$$

(b) Démontrer qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\} \times \mathbb{R}$ tel que Z_2 (*cf.* partie B) et T suivent la même loi.

3. On prolonge l'étude précédente et on considère la variable aléatoire :

$$T_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} X_k.$$

(a) Calculer $\mathbb{E}(T_p)$ et $\mathbb{V}(T_p)$. En déduire la nature (convergence ou divergence) des suites $(\mathbb{E}(T_p))_{p\geqslant 2}$ et $(\mathbb{V}(T_p))_{p\geqslant 2}$.

(b) Démontrer par récurrence que T_p admet une densité définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{T_p}(x) = \begin{cases} \lambda p e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{p-1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}.$$