DEVOIR SURVEILLÉ 4

Angers Le Fresne : BCPST2

13 Janvier 2024

1. **(a)** Le changement de variable est affine, donc bien possible, et on a alors pour tout entier n non nul

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 ((1-x)e^x)^n \mathrm{d}x \\ &= \int_n^0 \left(\frac{u}{n}e^{1-\frac{u}{n}}\right)^n \left(-\frac{1}{n}\right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_0^n u^n e^{-u} \mathrm{d}u \end{aligned}$$

(b) Il suffit d'étudier la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{2}x^2 + \ln(1-x)$ pour montrer l'inégalité.

(c) En passant à l'exponentielle, qui est croissante, dans l'inégalité précédente, on a donc $h_n(x) \leqslant e^{-\frac{nx^2}{2}}$.

Cette fonction étant positive, on a donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\frac{nx^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

en utilisant le changement de variables $t^2 = nx^2$.

En utilisant la densité de la loi normale centrée réduite, on a donc

$$0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

2. **(a)** On a donc

$$H(x) = -\frac{2}{nx^2} \ln(h_n^*(x)) = -\frac{2}{x^2}(x + \ln(1-x)).$$

En utilisant un développement limité, on a donc

$$H(x) = -\frac{2}{x^2}\left(x + -x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) = 1 + \mathrm{o}\left(1\right).$$

Ainsi, H est prolongeable par continuité par $H(0) = 1$.

(b) On montre facilement que la fonction g est croissante strictement. Comme $g(0) = 0$, on a bien le résultat.

(c) La fonction H est dérivable sur $]0,1[$, et pour tout $x \in]0,1[$

$$H'(x) = \frac{4g(x)}{x^3(1-x)} > 0.$$

Ainsi, la fonction H est strictement croissante sur $[0,1[$, et comme elle y est continue, elle induit bien une bijection sur son image.

On a déjà vu que $\lim\limits_{x\to 0} H(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} H(x) = +\infty$.

Par théorème de la bijection, on a bien le résultat voulu.

3. **(a)** La suite définie par $u_0 = 1$ et $u_n = n^{-\frac{1}{3}}$ convient.

(b) La fonction H est continue en 0, donc la suite (v_n) converge vers 1.

(c) La fonction h_n est positive, donc on en déduit la première inégalité.
La fonction H est croissante, et donc pour tout x de $[0, u_n]$, on a $H(x) \leqslant H(u_n) = v_n$, et donc

$$h_n(x) \geqslant \exp\left(-\frac{nx^2}{2}v_n\right).$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\int_0^{u_n} h_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{u_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}v_n\right)\mathrm{d}x,$$

et on conclut par changement de variables $y^2 = nv_nx^2$.

(d) On note que

$$\frac{1}{\sqrt{nv_n}}\int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Ainsi, en encadrant $I_n\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$, on montre que cette quantité tend vers 1, et on a donc

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

4. **(a)** Montrons-le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

- Pour $n = 1$, on a directement la densité d'une loi $\mathcal{E}(1)$.
- Supposons que S_n admette pour densité la fonction f_{S_n}.
Alors par lemme de coalition, les variables S_n et T_{n+1} sont indépendantes, et une densité de S_{n+1} est alors donnée par le produit de convolution de f_{S_1} et f_{S_n} ; on a clairement $f_{S_{n+1}}(x) = 0$ pour $x < 0$, et si $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} f_{S_{n+1}}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(t)f_{S_1}(x-t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}e^{t-x}\mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{-x}}{(n-1)!}\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^n}{n!}e^{-x} \end{aligned}$$

Par récurrence, on a bien le résultat voulu.

(b) On note que

$$\mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant n) = \int_0^n \frac{x^n}{n!}e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{n^{n+1}}{n!e^n}I_n$$

par la question 1a.
Comme $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et par $(\star)$, on a donc

$$\frac{1}{2} \sim \frac{n^{n+1}}{n!e^n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}},$$

et on retrouve la formule de Stirling en isolant $n!$.

5. **(a)** On peut utiliser `import random as rd`.

(b) Cette commande renvoie un nombre aléatoire de $[0, 1]$, suivant la loi uniforme continue.

(c) On démontre facilement que si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, alors $-\ln(U) \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

(d) On peut utiliser

```
def S(n):
    f = 0
    for _ in range(n):
        f += expo()
    return f

```

(e) On simule l'expérience plusieurs fois :

```
def star(n,N=10000):
    p = 0
    for _ in range(N):
        if S(n+1) <= n:
            p+=1/N
    return p

```

(f) On propose

```
def courbe_star(n,N=1000):
    abs = list(range(1,n))
    ord = [star(x,N) for x in abs]
    plt.plot(abs,ord)
    plt.show()

```

6. **(a)** On a au voisinage de 0 :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right).$$

(b) On sait déjà que la fonction arctan est positive sur $\mathbb{R}_+$.
L'étude de la fonction $x \mapsto x - \arctan(x)$ montre qu'elle est positive, et on a donc bien l'inégalité demandée.

(c) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cette fonction est dérivable, de dérivée

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

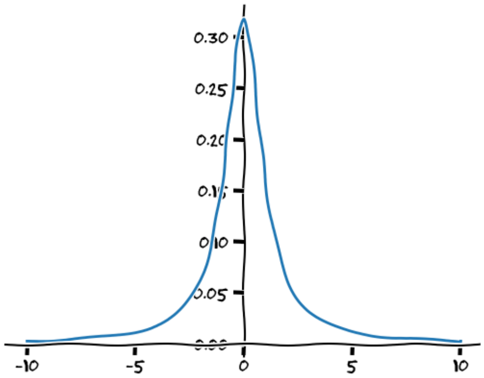
Ainsi, la fonction φ est constante, égale à $\varphi(1) = \frac{\pi}{2}$.

7. **(a)** La fonction f est bien positive et continue sur $\mathbb{R}$. On a alors pour tous réels $\alpha < \omega$:

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\omega f(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+(t-\theta)^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\arctan(t-\theta)\right]_\alpha^\omega \\
&\xrightarrow[\substack{\alpha\to-\infty \\ \omega\to+\infty}]{} 1
\end{aligned}$$

(b) On a $xf(x) \sim \frac{1}{\pi x}$ au voisinage de $+\infty$, donc par théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, la variable X n'admet pas d'espérance.

(c) On a la courbe



8. **(a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\arctan(t-\theta)\right]_{-\infty}^{x} \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan(x-\theta) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) On a donc

$$\begin{aligned} F_X(x) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \arctan(x-\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \theta \end{aligned}$$

9. **(a)** La fonction $\varphi_{n,x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et équivalente à $\frac{1}{n^2t^4}$ en $-\infty$ et $+\infty$.
Ainsi, par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale proposée converge bien.

(b) Soient deux réels $\alpha < \omega$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\omega} \psi_{n,x}(t)\mathrm{d}t &= \int_{\alpha}^{\omega} \frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_{\alpha}^{\omega} \frac{2n(nt-x)\mathrm{d}t}{1+(x-nt)^2} \\ &= \ln(1+\omega^2) - \ln(1+\alpha^2) - \ln(1+(x-n\omega)^2) + \ln(1+(x-n\alpha)^2) \\ &= \ln\left(\frac{1+\omega^2}{1+(x-n\omega)^2}\right) - \ln\left(\frac{1+\alpha^2}{1+(x-n\alpha)^2}\right) \end{aligned}$$

Or $\frac{1+\omega^2}{1+(x-n\omega)^2} \underset{\omega\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1+\alpha^2}{1+(x-n\alpha)^2} \underset{\alpha\to-\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, et la fonction ln est continue en $\frac{1}{n^2}$.
Finalement, l'intégrale proposée converge et vaut 0.

(c) On note que pour tout t :

$$\varphi_{n,x}(t) = \frac{1}{\sigma_{n,x}}\left(nx\psi_{n,x}(t) + \frac{1+x^2-n^2}{1+t^2} + \frac{n^2(x^2+n^2-1)}{1+(x-nt)^2}\right).$$

Les intégrales $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n,x}(t)\mathrm{d}t$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2-n^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n^2(x^2+n^2-1)}{1+(x-nt)^2}\mathrm{d}t$ convergent toutes les trois, et valent respectivement 0, $\pi(1+x^2-n^2)$ et $\pi n(x^2+n^2-1)$.
Ainsi, par linéarité, on a bien le résultat voulu.

10. **(a)** On a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(Y \leqslant t) \\ &= F_X(t+\theta) \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan(t) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, Y suit la loi $\mathcal{C}(0)$.

(b) Par produit de convolution, W_2 est à densité, et une densité est donnée par

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2}\varphi_{1,x}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi^2}\frac{2\pi}{x^2+4} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{x^2+4} \end{aligned}$$

On en déduit la fonction de répartition de W_2 :

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi}\frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}t}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on a pour tout x :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\overline{Y_2} \leqslant x) &= \mathbb{P}(W_2 \leqslant 2x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x) \end{aligned}$$

La variable $\overline{Y_2}$ suit donc une loi $\mathcal{C}(0)$.

(c) Par la question précédente, la somme de deux lois $\mathcal{C}(0)$ indépendante reste une loi $\mathcal{C}(0)$. Ainsi, par une récurrence immédiate, la variable $\overline{Y_n}$ suit une loi $\mathcal{C}(0)$.

(d) La loi des grands nombres ne peut pas s'appliquer car elle nécessite que la loi admette une espérance.

11. **(a)** On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x).$$

Par composition de fonctions bijectives, la fonction F_Y est donc bijective dans son image $]0,1[$. Son inverse est donné par

$$F_Y^{-1}(t) = \tan\left(\pi\left(t - \frac{1}{2}\right)\right).$$

(b) On a donc pour tout t :

$$\mathbb{P}(F_Y^{-1}(U) \leqslant t) = \mathbb{P}(U \leqslant F_Y(t)) = F_Y(t).$$

Ainsi, $F_Y^{-1}(U)$ suit la même loi que Y.

(c) On peut donc utiliser le code

```python
def G(x):
    return np.tan(np.pi*x - np.pi/2)

def cauchy():
    return G(rd.random())

```

(d) On lance le script

```
plt.hist([cauchy() for _ in range(10000)], bins=50, range=[-8,8], color='white', ec='black',density=True)
plt.show()
```

(e) De même, on peut utiliser le script :

```
def barre(n):
    x = [cauchy() for _ in range(n)]
    return sum(x)/n

plt.hist([barre(100) for _ in range(10000)], bins=50, range=[-8,8], color='white', ec='black',density=True)
plt.show()
```

(f) Les deux histogrammes étant très similaires, on peut en conclure que les deux variables Y et $\overline{Y_n}$ suivent bien la même loi.