DEVOIR SURVEILLÉ 4

Angers Le Fresne : BCPST2

2025

1. **(a)** Soit φ_n la proposition « La variable X_k admet un moment d'ordre n égal à $\frac{n!}{\lambda^n}$ ».

- Il est clair qu'elle admet un moment d'ordre 0, qui vaut 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose φ_n. Soit alors $A > 0$. On a, par théorème d'intégration par parties appliqué aux fonctions $x \mapsto -e^{-\lambda x}$ et $x \mapsto x^{n+1}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, A]$:

$$\begin{aligned}\int_0^A x^{n+1}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x &= [-e^{-\lambda x}x^{n+1}]_0^A + \frac{n+1}{\lambda}\int_0^A x^n \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &\xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{n+1}{\lambda} m_n(X_k)\end{aligned}$$

par croissances comparées, théorème de transfert et φ_n.
Ainsi, X_k admet un moment d'ordre $n+1$ qui vaut $\frac{n+1}{\lambda}\frac{n!}{\lambda^n} = \frac{(n+1)!}{\lambda^{n+1}}$.

Par récurrence, on a bien le résultat voulu.

(b) On a $\frac{1}{m_n(X_k)} = \frac{\lambda^n}{n!}$; on reconnait le terme général d'une série exponentielle, qui est convergente. Sa somme est alors e^λ.

2. **(a)** Il est clair que si $t < 0$, $\overline{F}_{X_1}(t) = 1$. Si $t \geqslant 0$, on a alors $\overline{F}_{X_1}(t) = \mathbb{P}(X_1 \geqslant t) = e^{-\lambda t}$.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\overline{F}_{Y_p}(t) &= \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, x_p) > t) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^p X_i > t\right) \\ &= \prod_{i=1}^p \mathbb{P}(X_i > t) \quad \text{par indépendance} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0 \\ e^{-p\lambda t} & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

On a alors $F_{Y_p}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-p\lambda t} & \text{sinon}\end{cases}$, et on reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $p\lambda$. Ainsi, $Y_p \hookrightarrow \mathcal{E}(p\lambda)$.

(c) On déduit directement de la loi de Y_p qu'elle admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(Y_p) = \frac{1}{\lambda p} \text{ et } \mathbb{V}(Y_p) = \frac{1}{\lambda^2 p^2}.$$

3. On a dans ces questions $p = 2$ et $\lambda = \frac{1}{2}$.

(a) On a $\mathbb{P}(X_2 \leqslant 2) = 1 - e^{-1}$.

(b) Il est clair que la probabilité cherchée est celle que le premier technicien intervienne pendant moins d'une heure : $\mathbb{P}(X_1 \leqslant 1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$.

(c) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X_2\leqslant 2]}(Y_2 \leqslant 1) &= 1 - \mathbb{P}_{[X_2\leqslant 2]}(Y_2 > 1) \\
&= 1 - \frac{\mathbb{P}(Y_2 > 1 \cap X_2 \leqslant 2)}{\mathbb{P}(X_2 \leqslant 2)} \\
&= 1 - \frac{\mathbb{P}(X_1 > 1)\mathbb{P}(1 < X_2 \leqslant 2)}{\mathbb{P}(X_2 \leqslant 2)} \\
&= 1 - \frac{\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}\right)}{1 - e^{-1}} \\
&= \frac{1 - e^{-\frac{3}{2}} - e^{-\frac{1}{2}} + e^{-1}}{1 - e^{-1}}
\end{aligned}$$

Calcul d'une limite d'une probabilité

1. **(a)** Il est clair que $F_{Z_2}(t) = 0$ si $t < 0$. Soit alors $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
F_{Z_2}(t) &= \mathbb{P}(Z_2 \leqslant t) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leqslant t \cap X_2 \leqslant t) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leqslant t)^2 \quad \text{par indépendance} \\
&= \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2
\end{aligned}$$

La fonction Z_2 est alors continue et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et on vérifie facilement la continuité en 0.
Ainsi, Z_2 est à densité, avec une densité donnée par

$$f_{Z_2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2\lambda e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right) & \text{sinon} \end{cases}.$$

(b) Sur $\mathbb{R}_+$, on a alors

$$t f_{Z_2}(t) = 2t\lambda e^{-\lambda x} - 2t\lambda e^{-2\lambda x}.$$

Or les intégrales des deux termes sont convergentes (on reconnait des espérances de lois exponentielles). Ainsi, par linéarité, Z_2 admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(Z_2) = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}.$$

On a alors bien $\mathbb{E}(Y_2) + \mathbb{E}(Z_2) = \frac{2}{\lambda} = \mathbb{E}(X_1 + X_2)$.
On aurait pu le savoir en notant que $X_1 + X_2 = Y_2 + Z_2$.

(c) Comme dans la question précédente,

$$\forall t \geqslant 0,\ t^2 f_{Z_2}(t) = 2t^2\lambda e^{-\lambda x} - 2t^2\lambda e^{-2\lambda x},$$

et on reconnait deux fonctions dont les intégrales convergent.
Ainsi, Z_2 admet une variance, et par formule de König-Huygens,

$$\mathbb{V}(Z_2) = \mathbb{E}(Z_2^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{7}{2\lambda^2} - \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{5}{4\lambda^2}.$$

2. **(a)** On a $\mathbb{P}(Z_2 \geqslant x + n) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda(n+x)}\right)^2 = e^{-\lambda(n+x)}\left(2 - e^{-\lambda(n+x)}\right)$.
Ainsi, $\mathbb{P}(Z_2 \geqslant n + x) \sim 2e^{-\lambda(n+x)}$, qui est le terme général d'une suite géométrique de premier terme $2e^{-\lambda x}$ et de raison $e^{-\lambda}$.

(b) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[Z_2\geqslant n]}(Z_2 \geqslant n+x) &= \frac{\mathbb{P}(Z_2 \geqslant n+x)}{\mathbb{P}(Z_2 \geqslant n)} \\ &\sim \frac{2e^{-\lambda(n+x)}}{2e^{-\lambda n}} \\ &\sim e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(X_1 \geqslant x)\end{aligned}$$

On a donc bien la limite voulue.

(c) La loi exponentielle étant sans mémoire, on a bien le même résultat pour X_1 (qui reste vrai sans même prendre la limite).

Sommes de variables aléatoires

1. **(a)** La variable X_2 étant positive, il est clair que F_{aX_2+b} est nulle sur $]-\infty, b[$. Soit donc $t \geqslant b$. On a

$$\begin{aligned}F_{aX_2+b}(t) &= \mathbb{P}(aX_2 + b \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}\left(X_2 \leqslant \frac{t-b}{a}\right) \\ &= F_{X_2}\left(\frac{t-b}{a}\right)\end{aligned}$$

La fonction F_{aX_2+b} est alors continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf peut-être en b.
$aX_2 + b$ est donc une variable à densité, et sa densité est bien donnée par la fonction proposée.

(b) Il suffit d'utiliser le lemme de coalition.

2. **(a)** On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x-t) f_{aX_2+b}(t)\mathrm{d}t.$$

Le produit des deux fonctions est non nul pour $x - t \geqslant 0$ et $t \geqslant b$, *i.e.* t compris entre b et x ; ceci n'est possible que si $x \geqslant b$.
On a donc directement $\forall x < b,\ f_T(x) = 0$.
Si $x \geqslant b$, on a alors

$$\begin{aligned}f_T(x) &= \int_b^x \lambda e^{-\lambda(x-t)} \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{\lambda}{a}(t-b)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\lambda^2}{a} e^{-\lambda x} e^{\frac{b}{a}\lambda} \int_b^x e^{-\lambda t\left(\frac{1}{a}-1\right)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\lambda}{1-a}\left(e^{-\lambda(x-b)} - e^{-\frac{\lambda}{a}(x-b)}\right)\end{aligned}$$

(b) Les valeurs $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$ conviennent clairement.
On note ensuite que si Z_2 et T ont la même loi, elles sont même espérance et variance, et donc

$$\frac{3}{2\lambda} = \frac{1+a}{\lambda} + b \text{ et } \frac{5}{4\lambda^2} = \frac{1+a^2}{\lambda^2}.$$

On en déduit alors que nécessairement, $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$, ce qui démontre l'unicité.

3. **(a)** Par linéarité, on a $\mathbb{E}(T_p) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k\lambda}$, et par indépendance, $\mathbb{V}(T_p) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2\lambda}$.

La série harmonique étant divergente, la suite $(\mathbb{E}(T_p))$ diverge, et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente, la suite $(\mathbb{V}(T_p))$ converge.

(b) On note que par la question C1a, la variable $\frac{1}{k}X_k$ admet pour densité

$$f_{\frac{1}{k}X_k}(t) = \begin{cases} \lambda k e^{-\lambda k t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrons ensuite par récurrence que T_p a bien la densité donnée.

- On a $T_1 = X_1$, et donc bien le résultat voulu.
- Supposons que T_p admet la densité proposée. Alors T_p et $\frac{1}{p+1}X_{p+1}$ sont indépendantes par lemme de coalition, et donc T_{p+1} admet bien une densité.
  Il est clair que cette densité est nulle sur $\mathbb{R}_-$, les X_k étant des variables positives.
  Par produit de convolution, on a alors

$$\begin{aligned} f_{T_{p+1}}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\frac{1}{p+1}X_{p+1}}(x-t) f_{T_p}(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \lambda(p+1)e^{-\lambda(p+1)(x-t)}\lambda p e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{p-1}\mathrm{d}t \\ &= p(p+1)\lambda^2 e^{-\lambda(p+1)x}\int_0^x e^{\lambda t}\left(e^{\lambda t}-1\right)^{p-1}\mathrm{d}t \\ &= \lambda(p+1)e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^p \end{aligned}$$

  On a donc bien la densité voulue.

Finalement, par récurrence, on a le résultat cherché.