MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET INFORMATIQUE

2017

Partie 1

1. On développe :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2x_i\bar{x}) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + n\bar{x}^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + n\bar{x}^2 - 2n\bar{x}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i\end{aligned}$$

2. Calculons les dérivées partielles de F ; pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial a}(a, b) &= \sum_{i=1}^n -2(y_i - a - bx_i) = -2(n\bar{y} - na - bn\bar{x}) \\ \frac{\partial F}{\partial b}(a, b) &= \sum_{i=1}^n -2x_i(y_i - a - bx_i) = -2\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - an\bar{x} - b \sum_{i=1}^n x_i^2\right)\end{aligned}$$

Ainsi, ces deux dérivées partielles si et seulement si

$$\begin{aligned}&\begin{cases} na + bn\bar{x} = n\bar{y} & L_1 \\ an\bar{x} + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i & L_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y} & L_1 \\ an\bar{x} + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i & L_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y} & L_1 \\ b\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} & L_2 \leftarrow L_2 - \bar{x}L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a = \hat{a} \\ b = \hat{b} \end{cases}\end{aligned}$$

par la question 1.1.

3. Pour ces valeurs de a et b , on a donc minimisé la somme des carrés des écarts entre les points (x_i, y_i) et la droite d'équation $y = ax + b$.

La droite $y = \hat{a}x + \hat{b}$ est donc la droite de régression linéaire du système de points.

4. Après calculs, on trouve

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 11 \\ \bar{y} &= 35 \\ \sum_{i=1}^n y_i(x_i - \bar{x}) &= 994 \\ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= 330\end{aligned}$$

D'où les valeurs

$$\hat{b} \approx 3.012 \text{ et } \hat{a} \approx 1.867.$$

5. (a) Il suffit ici de sommer les éléments de la liste L , puis de diviser par le nombre d'éléments.

```
1 def moy(L):
2     somme = 0
3     longueur = 0
4     for elem in L:
5         somme = somme + elem
6         longueur = longueur + 1
7     return somme/longueur
8
```

- (b) Les réponses correctes sont les i et iv.

- (c) On utilise la formule trouvée en 1.2. :

```
1 def Bchap(x, y):
2     n = len(x)
3     xbarre = moy(x)
4     numerateur = 0
5     denominateur = 0
6     for i in range(n):
7         numerateur = numerateur + y[i]*(x[i]+xbarre)
8         denominateur = denominateur + (x[i]-xbarre)**2
9     return numerateur/denominateur
10
```

- (d) On réutilise la fonction Bchap précédente :

```
1 def Achap(x, y):
2     xbarre = moy(x)
3     ybarre = moy(y)
4     b = Bchap(x, y)
5     return ybarre - b*xbarre
6
```

Partie 2

1. Par linéarité de l'espérance, on a pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\mathbb{E}(Y_i) = a + bx_i + \mathbb{E}(\varepsilon_i) = a + bx_i.$$

2. Par linéarité de l'espérance, on a donc, x_i et $\bar{x}$ étant des constantes

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i(x_i - \bar{x})\right) &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(a + bx_i) \\ &= an\bar{x} + b \sum_{i=1}^n x_i^2 - na\bar{x} - b\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i \\ &= b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{par la question 1.1} \end{aligned}$$

3. On a donc par la question précédente et par linéarité

$$\mathbb{E}(\hat{b}) = b \text{ et donc } \mathbb{E}(\hat{b} - b) = 0.$$

On a donc bien un estimateur sans biais de b .

4. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{Y}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i) \quad \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a + bx_i \quad \text{par 2.1} \\ &= a + b\bar{x} \end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{E}(\hat{a} - a) = \mathbb{E}(\bar{Y}) - \bar{x}\mathbb{E}(\hat{b}) - a = a + b\bar{x} - b\bar{x} - a = 0.$$

L'estimateur $\hat{a}$ est donc un estimateur sans biais de a .

5. Calculons...

$$\begin{aligned}
 \widehat{b} - b &= \frac{\sum_{i=1}^n Y_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} - b \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n Y_i(x_i - \bar{x}) - b \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - bx_i + b\bar{x})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (a + \varepsilon_i + b\bar{x})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{car } \sum_{i=1}^n (a + b\bar{x})(x_i - \bar{x}) = (a + b\bar{x}) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0.$$

6. b étant une constante, on a directement par propriété de la variance

$$\mathbb{V}(\widehat{b}) = \mathbb{V}(\widehat{b} - b).$$

7. On a donc, par la question précédente, et propriété de la variance, les variables ε_i étant indépendantes

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}(\widehat{b}) &= \mathbb{V}(\widehat{b} - b) \\
 &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \mathbb{V}(\varepsilon_i) \\
 &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}
 \end{aligned}$$

8. (a) Si pour tout i , $x_i = i$, on a donc

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{n+1}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n \left(i - \frac{1}{2}(n+1)\right)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{1}{4}(n+1)^2 - (n+1)i \\
 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}n(n+1)^2 - \frac{1}{2}n(n+1)^2 \\
 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{4}n(n+1)^2 \\
 &= \frac{1}{12}n(n+1)(n-1)
 \end{aligned}$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. La variable $\widehat{b}_n$ admet une variance, et on peut donc lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(|\widehat{b}_n - b| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(\widehat{b})}{\varepsilon^2}.$$

Or d'après les questions 2.7 et 2.8.a, la variance de $\widehat{b}_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et par théorème de majoration, la suite $\left(\mathbb{P}\left(|\widehat{b}_n - b| \geq \varepsilon\right)\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$; la suite $(\widehat{b}_n)$ converge donc en probabilité vers b .

9. (a) Notons que par indépendance des Y_i , on a

$$\mathbb{V}(\tilde{b}) = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \sigma^2.$$

On a vu en 2.7 que

$$\mathbb{V}(\hat{b}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Notons dans la suite $V = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\tilde{b} - \hat{b}) &= \mathbb{V}\left(Y_i \left(\mu_i - \frac{x_i - \bar{x}}{V}\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\mu_i - \frac{x_i - \bar{x}}{V}\right)^2 \sigma^2 \quad \text{par indépendance} \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \sigma^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{V^2} \sigma^2 - 2 \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{x_i - \bar{x}}{V} \sigma^2 \\ &= \mathbb{V}(\tilde{b}) + \mathbb{V}(\hat{b}) - 2 \frac{\sigma^2}{V} \sum_{i=1}^n \mu_i x_i + 2 \frac{\sigma^2}{V} \bar{x} \sum_{i=1}^n \mu_i \\ &= \mathbb{V}(\tilde{b}) + \mathbb{V}(\hat{b}) - 2\mathbb{V}(\hat{b}) \quad \text{par hypothèse sur les } \mu_i \\ &= \mathbb{V}(\tilde{b}) - \mathbb{V}(\hat{b}) \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat demandé.

(b) La variance étant toujours positive, on a $\mathbb{V}(\tilde{b} - \hat{b}) \geq 0$, et donc

$$\mathbb{V}(\tilde{b}) \geq \mathbb{V}(\hat{b}).$$

10. Soit T un estimateur sans biais de b , combinaison linéaire des Y_i : $T = \sum_{i=1}^n \mu_i Y_i$.

On a alors par linéarité $\mathbb{E}(T) = \sum_{i=1}^n \mu_i (a + bx_i) = a \sum_{i=1}^n \mu_i + b \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$. Pour que T soit sans biais, quelques soient a et b , on doit donc avoir $\sum \mu_i = 1$ et $\sum \mu_i x_i = 1$.

Ainsi, T est de la même forme que $\tilde{b}$ de la question 2.9, et donc a une variance supérieure à celle de $\hat{b}$.

L'estimateur $\hat{b}$ est donc de variance minimale parmi les estimateurs de b sans biais combinaison linéaire des Y_i .

Partie 3

1. Par somme et transformation affine de lois normales indépendantes, les variables Y_i , puis la variable $\hat{b}$ suivent des lois normales. Ainsi,

$$\hat{b} \hookrightarrow \mathcal{N}(\mathbb{E}(\hat{b}), \mathbb{V}(\hat{b})).$$

Or on a vu en 2.3 que $\mathbb{E}(\hat{b}) = b$ et en 2.7 que $\mathbb{V}(\hat{b}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$. Ainsi,

$$\hat{b} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(b, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}\right).$$

2. On note que dans la phase de floraison, le nombre de feuille ne change pas : on a donc $b = 0$.

(a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a alors

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= a + \varepsilon_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a + \varepsilon_i) \\ &= a + \varepsilon_i - a - \bar{\varepsilon} \\ &= \varepsilon_i - \bar{\varepsilon} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2$$

et on retrouve bien la formule demandée.

(b) Calculons...

$$\begin{aligned} \Gamma \tilde{E} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \\ -\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \\ -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 - \varepsilon_4 \\ -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon_3 - \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon_4 - \bar{\varepsilon} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Toutes les colonnes sont identiques et non nulles, et donc $\text{rg}(J) = 1$.

(d) Notons U le vecteur colonne ne contenant que des 1. Alors $JU = 4U$, et comme $U \neq 0$, il est vecteur propre de Γ associé à la valeur propre 4.

(e) D'après 3.2.c, 0 est valeur propre de Γ , et son sous-espace propre associé est de dimension 3 par le théorème du rang.

D'après 3.2.d, 4 est valeur propre de Γ . La somme de dimensions des sous-espaces propres ne pouvant excéder 4, l'espace $E_4(\Gamma)$ est de dimension 1, et il ne peut pas y avoir d'autres valeurs propres. Finalement

$$\text{Spec}(J) = \{0, 4\}.$$

(f) On a bien $\Gamma = I_4 - \frac{1}{4}J$, et

$$\text{rg}(\Gamma) = \text{rg}\left(-4\left(I_4 - \frac{1}{4}J\right)\right) = \text{rg}(J - 4I_4) = 3,$$

donc 0 est valeur propre de Γ , et

$$\text{rg}(\Gamma - I_4) = \text{rg}\left(-\frac{1}{4}J\right) = 1,$$

donc 1 est valeur propre de Γ .

De plus, par le théorème du rang, on a

$$\dim E_0(\Gamma) = 1 \text{ et } \dim E_1(\Gamma) = 3.$$

Il ne peut donc pas y avoir d'autres valeurs propres, et donc

$$\text{Spec}(\Gamma) = \{0, 1\}.$$

(g) La matrice Γ est symétrique réelle, et donc diagonalisable en base orthonormée par le théorème spectral : il existe une matrice inversible P telle que ${}^tP = P^{-1}$ et une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de Γ telles que

$$\Gamma = PD{}^tP.$$

On a alors $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'après la question précédente.

(h) On a donc

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2 &= {}^t E E \\
 &= {}^t (\Gamma \tilde{E}) \Gamma \tilde{E} \quad \text{par 3.2.b} \\
 &= {}^t \tilde{E} \Gamma^2 \tilde{E} \quad \text{car } \Gamma \text{ symétrique} \\
 &= {}^t \tilde{E} P D^2 {}^t P \tilde{E} \quad \text{par 3.2.g} \\
 &= {}^t V D^2 V \\
 &= (V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} \\
 &= (V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4) \begin{pmatrix} \lambda_1 V_1 \\ \lambda_2 V_2 \\ \lambda_3 V_3 \\ \lambda_4 V_4 \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 V_i^2
 \end{aligned}$$

(i) Notons pour i entre 1 et 4 : $W_i = \frac{1}{\sigma} V_i$, de sorte que les W_i sont des variables indépendantes, de loi normale centrée réduite. Alors

$$\begin{aligned}
 \frac{3\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^4 (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2 \quad \text{par 3.2.a} \\
 &= \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 W_i^2 \quad \text{par 3.2.h} \\
 &= W_1^2 + W_2^2 + W_3^2
 \end{aligned}$$

les valeurs propres de Γ étant $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ et $\lambda_4 = 0$.

Ainsi, $\frac{3\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \hookrightarrow \chi^2(3)$.

3. Pour des valeurs $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ et un indice $n_1 \in \llbracket 1, n \rrbracket$, considérons la somme

$$\sum_{i=1}^{n_1} (Y_i - a_1 - bx_1)^2 + \sum_{i=n_1+1}^n (Y_i - a_2 - bx_2)^2.$$

Les deux sommes étant positives, cette valeur est minimale quand :

- a_1 et b_1 sont les coefficients de la méthode des moindres carrés pour la première phase
- a_2 et b_2 sont les coefficients de la méthode des moindres carrés pour la deuxième phase
- n_1 correspond au temps T_1 : $T_1 = x_{n_1}$.

Il suffit donc de prendre pour n_1 la valeur qui rend minimale la quantité

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} (Y_i - a_1 - bx_1)^2 + \sum_{i=n_1+1}^n (Y_i - a_2 - bx_2)^2 \middle| a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

qui existe bien puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités, et de prendre $T_1 = x_{n_1}$.

4. De la même façon, on choisit le couple (n_1, n_2) minimisant la quantité

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} (Y_i - a_1 - bx_1)^2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} (Y_i - a_2 - bx_2)^2 + \sum_{i=n_2+1}^n (Y_i - a_3 - bx_3)^2 \middle| a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

puis de prendre $T_1 = x_{n_1}$ et $T_2 = x_{n_2}$.

Partie 4

1. (a) La fonction u étant de classe C^4 , on peut écrire

$$u(x) = u(x_i) + u'(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{2}u^{(2)}(x_i)(x - x_i)^2 + \frac{1}{6}u^{(3)}(x_i)(x - x_i)^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(x_i)(x - x_i)^4 + \underset{x \rightarrow x_i}{o} \left((x - x_i)^4 \right).$$

(b) On a donc

$$x_{i-1} = x_i - h \text{ et } x_{i+1} = x_i + h.$$

En appliquant la question précédente

$$u_{u-1} = u(x_i) - u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 - \frac{1}{6}u^{(3)}(x_i)h^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(u_i)h^4 + o(h^4)$$
$$u_{u+1} = u(x_i) + u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}u^{(3)}(x_i)h^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(u_i)h^4 + o(h^4)$$

En sommant les deux lignes, on a donc

$$u_{i-1} + u_{i+1} = 2u_i + u''(x_i)h^2 + \frac{1}{12}u^{(4)}(u_i)h^4 + o(h^4).$$

On en tire donc

$$u''(x_i) = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \underbrace{\frac{-1}{2}u^{(4)}(u_i)h^3 + o(h^4)}_{e(h)}.$$

2. (a) Pour la fonction $u : x \mapsto a_1 + b_1x$, on a donc

$$D_i = u''(x_i) - e(h) = o(h^4).$$

(b) On peut faire le même raisonnement sur chacune des parties du graphe : pour un point "au milieu" d'une région, on aura $D_i \approx 0$. Il suffit donc de calculer tous les D_i , et de garder les deux plus élevés, qui correspondront au temps de séparation des différentes phases.

3. (a) Cette fonction parcourt la liste L, et sauvegarde la valeur de l'indice courant dès qu'elle rencontre un élément plus petit que le maximum local.

Ainsi, cette fonction renverra l'indice du maximum de la liste.

(b) Si la liste est vide, on aura $n = 0$, puis $p = 0$, puis une erreur lorsqu'on veut calculer $L[0]$.

(c) On peut écrire

```
1 def Mystere2(L):
2     n = len(L)
3     p = 0
4     for k in range(1, n):
5         if L[p] < L[k]:
6             p = k
7     return p
8
```

Dans le cas d'une liste vide, cette fonction renvoie 0.

(d) i. Si on dispose d'un algorithme de tri, il suffit de trier la liste par ordre croissant, puis de prendre les deux derniers éléments de la liste pour déterminer les deux maxima.

Ensuite, on peut reparcourir la liste pour trouver la position de ces deux valeurs, toutes les valeurs étant distinctes.

ii. Les éléments étant deux à deux distincts, on parcourt à nouveau la liste en cherchant l'indice du maximum n'étant pas $L[p1]$.

```
1 def DeuxMax(L):
2     """Calcule l'indice des deux plus grands éléments de L"""
3     n = len(L)
4     p1 = Mystere(L)
5     p2 = 0
6     for k in range(1, n):
7         if k != p1 and L[k] > L[p2]:
8             p2 = k
9     return [p1, p2]
10
```

4. (a) Pour $x_{i+1} \leq T_1$, on a donc

$$D_i = \frac{1}{h^2} (a_1 + b_1(x_i - h) + \varepsilon_{i-1} - 2a_1 - 2b_1x_i - 2\varepsilon_i + a_1 + b_1(x_i + h) + \varepsilon_{i+1})$$
$$= \frac{1}{h^2} (-4(-1)^i \varepsilon)$$

(b) si on se place en i tel que $x_i \leq T_1$ et $x_{i+1} > T_1$, on trouve

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{1}{h^2} (a_1 + b_1(x_i - h) + (-1)^{i-1}\varepsilon - 2a_1 - 2b_1x_i - 2(-1)^i\varepsilon + a_2 + b_2(x_i + h) + (-1)^{i+1}\varepsilon) \\ &= \frac{a_2 - a_1}{h^2} + \frac{(b_2 - b_1)(x_i + h)}{h^2} - 4\frac{(-1)^i\varepsilon}{h^2} \end{aligned}$$

Si ε est très petit, on peut donc approximer

$$D_i \approx \begin{cases} 0 & \text{si } x_{i+1} \leq T_1 \\ \frac{a_2 - a_1}{h^2} + \frac{(b_2 - b_1)(x_i + h)}{h^2} & \text{si } x_i \leq T_1 \text{ et } x_{i+1} \geq T_1 \end{cases} .$$

Ainsi, comme en 4.2.b, en calculant tous les D_i et en regardant les deux plus grands (en valeur absolue), on aura les deux instants de changement de phase.

5. Remarque : ici, on devrait avoir n_1 (correspondant au premier changement de phase) au lieu de n .

(a) On a donc, pour $i \in \llbracket 2, n_1 - 1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} y_i^1 &= y_i^0 + \frac{\alpha}{h^2} (y_{i-1}^0 - 2y_i^0 + y_{i+1}^0) \\ &= a_1 + b_1x_i + \varepsilon_i + \frac{\alpha}{h^2} (a_1 + b_1(x_i - h) - \varepsilon_i - 2a_1 - 2b_1x_i - 2\varepsilon_i + a_1 + b_1(x_i + h) - \varepsilon_i) \\ &= a_1 + b_1x_i + \underbrace{\left(1 - 4\frac{\alpha}{h^2}\right)}_{C(\alpha, h)} \varepsilon_i \end{aligned}$$

(b) On a donc une réduction de bruit si et seulement si $|C(\alpha, h)| < 1$, i.e. si et seulement si $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}h^2\right[$.

Pour $\alpha = \frac{h^2}{4}$, le bruit est supprimé, sauf aux extrémités.

(c) Il suffit d'utiliser la formule donnée :

```

1 def Lisse(Y, a, h) :
2     n = len(Y)
3     nouveauY = [0 for _ in range(n)] #on initialise y^{k+1}
4     nouveauY[0] = Y[0] #les bords ne changent pas
5     nouveauY[-1] = Y[-1]
6     for i in range(1, n-1) :
7         nouveauY[i] = Y[i] + (a/(h*h))*(Y[i-1] - 2Y[i] + Y[i+1])
8     return nouveauY
9 
```

(d) Là encore, on peut calculer les D_i et ne garder que les deux plus grands en valeur absolue.

(e) Le lissage atténue fortement les points de changement de phase, et cette méthode risque donc d'être très imprécise.