École Normale Supérieure

BCPST

2018

EXERCICE 1

1.1 On a une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, et on a directement :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ R(t) = re^t.$$

On a alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \int_0^t R(s)\mathrm{d}s = r\left(e^t - 1\right).$$

1.2 Une primitive est donnée par $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + \ln(x)$.

Ainsi, une primitive de $t \mapsto \left(1 + \frac{1}{B(t)}\right) B'(t)$ est donnée par $t \mapsto B(t) + \ln(B(t))$.

1.3 On a bien, d'après la relation proposée, $A'(t)(A(t)+1) = -A(t)R(t)$, et on retrouve bien l'égalité en divisant par $A(t) > 0$.

On a donc pour tout t :

$$A(t) + \ln(A(t)) - A(0) - \ln(A(0)) = r(1 - e^t),$$

et on en déduit

$$t = \ln\left(1 - \frac{1}{r}\left(A(t) + \ln(A(t)) - 2 - \ln(2)\right)\right).$$

On en déduit alors que

$$\tau(r) = \ln\left(1 + \frac{1}{r}(1 + \ln(2))\right).$$

1.4 La fonction ln est strictement croissante et la fonction inverse strictement décroissante, donc par composition, la fonction τ est strictement décroissante.

La fonction étant continue, son image est un intervalle, et donc

$$\mathrm{Im}(\tau) = \mathbb{R}_+^*.$$

1.5 Sur $]0, \tau(r)[$, on a alors par continuité de S en 0 :

$$S(t) = (1-r)e^{-t}.$$

On a alors par continuité de S en $\tau(r)$: $S(\tau(r)) = (1-r)e^{-\tau(r)}$. On en déduit alors que sur $]\tau(r), +\infty[$:

$$S(t) = (1-r)e^{-3\tau(r)}e^{2t}.$$

1.6 *On suppose ici que $r \neq 1$ pour que $S(0)$ soit non nul.*

L'égalité $\frac{R(t)+S(t)}{R(0)+S(0)} = \frac{R(T)}{R(0)}$ est triviale.

On a ensuite

$$\mathbb{R}(T)R(0) + R(0)S(T) = R(0)S(T) + S(0)R(T),$$

et on retrouve $\frac{R(T)}{R(0)} = \frac{S(T)}{S(0)}$.

1.7 Sous l'hypothèse **(H)**, on a alors

$$\frac{S(T)}{1-r} = 10.$$

Si on avait $T \leqslant \tau(r)$, on aurait alors $e^{-T} = 10$, ce qui est impossible.

Ainsi, $T > \tau(r)$.

1.8 On a alors
$$\frac{R(T)}{R(0)} = e^T \quad \text{et} \quad \frac{S(T)}{S(0)} = e^{2T-3\tau(r)}.$$
On a alors par **1.6** :
$$\frac{R(T)+S(T)}{R(0)+S(0)} = 10 = e^T = e^{2T-2\tau(r)}.$$

1.9 On a alors directement $T = \ln(10)$. On en déduit alors $\tau(r) = \frac{1}{3}\ln(10)$.
Par **1.3**, on a alors
$$r = \frac{1+\ln(2)}{\sqrt[3]{10}-1}.$$

1.10 Réciproquement, si on prend ces valeurs de r et T, on a bien $T > \tau(r)$ et
$$R(T)+S(T) = re^{\ln(10)} + (1-r)e^{-\ln(10)}e^{2\ln(10)} = 10.$$
De plus,
$$\frac{R(0)}{R(0)+S(0)} = r = \frac{R(T)}{R(T)+S(T)}.$$
Ainsi, les valeurs proposées en **1.9** de r et T satisfont bien les hypothèses **(H)**.

EXERCICE 2

2.1.1 On a donc $F_1 = 1$, $F_2 = 3$, $F_3 = 5$, et donc $X_{F_1} = X_1 = 3$, $X_{F_2} = X_3 = 2$ et $X_{F_3} = X_5 = 1$.

2.1.2 Il est clair que $F_2 \geqslant 2 > F_1$. Soit donc $i \geqslant 2$. On a alors pour tout $k \leqslant F_i$, $X_k \in \bigcup_{j=1}^{i} \{X_{F_j}\}$, et donc $F_{i+1} > F_i$.

Par définition, les X_{F_i} sont tous distincts, et on a bien l'égalité proposée.

2.1.3 *Dans cette question, il faudrait que F_{i-1} soit fixé, et non une variable aléatoire. On va alors le supposer ; toutes les probabilités calculées sont alors des probabilités conditionnelles en supposant $F_{i-1} = k$.*
Commençons par noter que par définition des F_k, on a
$$\{X_1, \ldots, X_{F_{i-1}}\} = \{X_{F_1}, \ldots, X_{F_{i-1}}\}.$$
La variable Z_j suit donc une loi de Bernoulli. Calculons son paramètre.
On a alors
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_j = 1) &= \mathbb{P}\left(X_j \notin \{X_1, \ldots, X_{F_{i-1}}\}\right) \\ &= 1 - \frac{i-1}{N}\end{aligned}$$
car l'ensemble $\{X_1, \ldots, X_{F_{i-1}}\}$ est de cardinal $i-1$ par la question 2.1.2.
Soit maintenant $j' \neq j$, $j' \geqslant F_{i-1}+1$. On a alors
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_j = 0 \cap Z_{j'} = 0) &= \mathbb{P}(X_j \in \{X_1, \ldots, X_{F_{i-1}}\} \cap X_{j'} \in \{X_1, \ldots, X_{F_{i-1}}\}) \\ &= \mathbb{P}(X_j \in \{X_1, \ldots, X_{F_{i-1}}\})\mathbb{P}(X_{j'} \in \{X_1, \ldots, X_{F_{i-1}}\}) \\ &= \mathbb{P}(Z_j = 0)\mathbb{P}(Z_{j'} = 0)\end{aligned}$$
par indépendance de X_j et $X_{j'}$.
Les Z_j étant des variables de Bernoulli, cette égalité suffit à prouver leur indépendance.

2.1.4 On a $F_i - F_{i-1} = \min\{j \geqslant 1\ ;\ Z_j = 1\}$. On cherche donc le rang du premier succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
La variable $F_i - F_{i-1}$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - \frac{i-1}{N}$, et
$$\mathbb{E}(F_i - F_{i-1}) = \frac{N}{N-i+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(F_i - F_{i-1}) = \frac{N(i-1)}{(N-i+1)^2}.$$
Montrons l'indépendance entre $F_2 - F_1$ et $F_3 - F_2$; le cas général est analogue.

Pour avoir $F_2 - F_1 = k$ et $F_3 - F_2 = \ell$, la suite des X_i doit être de la forme

$$X_1 = a, X_2 = a, \ldots, X_k = a, X_{k+1} = b, X_{k+2} \in \{a, b\}, \cdots, X_{k+\ell} \in \{a, b\}, X_{k+\ell+1} = c$$

avec a, b, c deux à deux distincts.
On a alors N choix pour a, $N-1$ pour b et $N-2$ pour c, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F_2 - F_1 = k \cap F_3 - F_2 = \ell) &= N\frac{1}{N^k}(N-1)\frac{1}{N}\frac{2}{N^{\ell-1}}(N-2)\frac{1}{N} \\
&= \frac{1}{N^{k-1}}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(\frac{2}{N}\right)^{\ell-1}\left(1 - \frac{2}{N}\right) \\
&= \mathbb{P}(F_2 - F_1 = k)\mathbb{P}(F_3 - F_2 = \ell)
\end{aligned}$$

2.1.5 Pour tout $t \in [i, i+1]$, on a $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{i}$, et par croissance de l'intégrale, on a bien le résultat voulu.
On obtient la seconde inégalité de la même façon.
En sommant les inégalités, on a donc par relation de Chasles

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{i=2}^{N} \frac{1}{i} \leqslant \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

et donc

$$1 + \ln(N+1) - \ln(2) - \ln(N) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} \leqslant 1.$$

Le membre de gauche étant positif, en posant $C = 1$, on a le résultat.

2.1.6 On a

$$F_N = 1 + \sum_{i=2}^{N} F_i - F_{i-1},$$

et par linéarité de l'espérance, on a donc

$$\mathbb{E}(F_N) = 1 + \sum_{i=2}^{N} \frac{N}{N-i+1} = \sum_{i+1}^{N} \frac{N}{i}$$

par changement d'indices.
Les $F_i - F_{i-1}$ étant indépendantes deux à deux, on a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(F_N) &= \sum_{i=2}^{N} \mathbb{V}(F_i - F_{i-1}) \\
&= \sum_{i=2}^{N} \frac{i-1}{N}\frac{N^2}{(N-i+1)^2} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{N(N-i)}{i^2} \\
&= N^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i^2} - N \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}
\end{aligned}$$

2.1.7 On note que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F_N}{N} - \ln(N)\right| &\leqslant \left|\frac{F_N}{N} - \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i}\right| + \left|\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} - \ln(N)\right| \\
&\leqslant \left|\frac{F_N}{N} - \mathbb{E}\left(\frac{F_N}{N}\right)\right| + C
\end{aligned}$$

L'événement $\left\{\left|\frac{F_N}{N} - \ln(N)\right| > \varepsilon\ln(N)\right\}$ est donc inclus dans $\left\{\left|\frac{F_N}{N} - \mathbb{E}\left(\frac{F_N}{N}\right)\right| > \varepsilon\ln(N) - C\right\}$, et par croissance de $\mathbb{P}$, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{F_N}{N}-\ln(N)\right|>\varepsilon\ln(N)\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{F_N}{N}-\mathbb{E}\left(\frac{F_N}{N}\right)\right|>\varepsilon\ln(N)-C\right)\\
&\leqslant \frac{\mathbb{V}\left(\frac{F_N}{N}\right)}{(\varepsilon\ln(N)-C)^2}\\
&\leqslant \frac{1}{(\varepsilon\ln(N)-C)^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i^2}\\
&\leqslant \frac{M^2\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}}{\ln(N)^2}
\end{aligned}$$

où M est un majorant de la suite $\left(\frac{\ln(N)}{\varepsilon\ln(N)-C}\right)$.

2.2.1 Pour avoir l'événement proposé, il faut et il suffit que les variables X_k soient dans $[\![1,N]\!]\backslash\{i_1,\dots,i_\ell\}$. Les variables étant mutuellement indépendantes, on a donc bien la probabilité demandée.

2.2.2 Avoir $\{F_N>k\}$ signifie que pour tout $\ell\leqslant k$, $X_\ell\in\bigcup\limits_{j=1}^{N-1}\{X_{F_j}\}$. Autrement dit, pour les k premières variables X_k, il existe un entier i qui n'a pas été tiré.
Ainsi,

$$\{F_N>k\}=\bigcup_{i=1}^{N}E_{k,i}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F_N>k) &= \sum_{\ell=1}^{n}\left((-1)^{\ell+1}\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_\ell\leqslant n}\mathbb{P}(E_{k,i_\ell})\right) && \text{par formule du crible}\\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\left((-1)^{\ell+1}\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_\ell\leqslant n}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^k\right) && \text{par } \mathbf{2.2.1}\\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\left((-1)^{\ell+1}\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^k\right)
\end{aligned}$$

car il y a exactement $\binom{N}{\ell}$ suites de longueur ℓ strictement croissantes de $[\![1,N]\!]$.

2.2.3 Une étude de fonction très simple permet de trouver le résultat.

2.2.4 On a donc

$$\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)}=e^{-\frac{\ell k_N(t)}{N}}.$$

De plus, on a

$$\binom{N}{\ell}=\frac{N!}{\ell!(N-\ell)!}\leqslant\frac{N^\ell}{\ell!}=\frac{1}{\ell!}e^{\ell\ln(N)},$$

et on a donc le résultat voulu.
Or on a $k_N(t)\geqslant N\ln(N)+tN$, et donc

$$\ell\ln(N)-k_N(t)\frac{\ell}{N}\leqslant -t\ell.$$

Par croissance de l'exponentielle, on a la deuxième inégalité.

2.2.5 On note que $\ell \ln(N) \geqslant \sum_{i=N-\ell+1}^{N} \ln(i)$ par croissance de ln, et donc

$$\begin{aligned}
\left|\ell \ln(N) - \sum_{i=N-\ell+1}^{N} \ln(i)\right| &= \ell \ln(N) - \sum_{i=N-\ell+1}^{N} \ln(i) \\
&\leqslant \ell \ln(N) - \ell \ln(N-\ell+1) \\
&\leqslant \ell \ln\left(1 + \frac{\ell-1}{N-\ell+1}\right) \\
&\leqslant \ell \frac{\ell-1}{N-\ell+1} \quad \text{par l'inégalité usuelle } \ln(1+s) \leqslant s \\
&\leqslant \frac{C_1}{N}
\end{aligned}$$

où C_1 est un majorant de la suite convergente $\left(\frac{\ell(\ell-1)N}{N-\ell+1}\right)$.

On a ensuite par définition

$$N \ln(N) + tN \leqslant k_N(t) < N \ln(N) + tN + 1,$$

puis

$$\begin{aligned}
\ell \ln(N) + (N \ln(N) + tN + 1) \ln\left(1 - \frac{\ell}{N}\right) + t\ell &< \ell \ln(N) + k_N(t) \ln\left(1 - \frac{\ell}{N}\right) + t\ell \\
&\leqslant \ell \ln(N) + (N \ln(N) + tN) \ln\left(1 - \frac{\ell}{N}\right) + t\ell.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $\ln(1+s) \leqslant s$ dans l'inégalité de droite, on obtient

$$\ell \ln(N) + k_N(t) \ln\left(1 - \frac{\ell}{N}\right) + t\ell \leqslant 0.$$

En utilisant l'inégalité de gauche, on a

$$\begin{aligned}
&\ell \ln(N) + (N \ln(N) + tN + 1) \ln\left(1 - \frac{\ell}{N}\right) + t\ell \\
=&\ell \ln(N) + (N \ln(N) + tN + 1)\left(-\frac{\ell}{N} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{N}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(\frac{\ell}{N}\right)^2\right)\right) + t\ell \\
=&-\frac{1}{2}\ell^2 \frac{\ln(N)}{N} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(N)}{N}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, par décroissance de la valeur absolue sur $\mathbb{R}_-$,

$$\left|\ell \ln(N) + k_N(t) \ln\left(1 - \frac{\ell}{N}\right) + t\ell\right| \leqslant \frac{\ln(N)}{N}\left|-\frac{1}{2}\ell^2 + \mathrm{o}(1)\right| \leqslant \frac{\ln(N)}{N} C_2$$

où C_2 est un majorant de la suite convergente $\left|-\frac{1}{2}\ell^2 + \mathrm{o}(1)\right|$.

En posant $C = \max(C_1, C_2)$, on a bien les deux inégalités voulues.

On a

$$\begin{aligned}
\left|\ln\left(\ell! \binom{N}{\ell}\left(1 - \frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)}\right) + t\ell\right| &= \left|\sum_{i=N-\ell+1}^{N} \ln(i) + k_N(t) \ln\left(1 - \frac{\ell}{N}\right) + t\ell\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{i=N-\ell+1}^{N} \ln(i) - \ell \ln(N)\right| + \left|\ell \ln(N) + k_N(t) \ln\left(1 - \frac{\ell}{N}\right) + t\ell\right| \\
&\leqslant \frac{C}{N} + \frac{C \ln(N)}{N} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\ln\left(\ell!\binom{N}{\ell}\left(1 - \frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)}\right) \to -t\ell$, et on a la limite cherchée par continuité de l'exponentielle.

2.2.6 On a $\left|(-1)^{\ell-1}\frac{e^{-t\ell}}{\ell!}\right| = \frac{e^{-t\ell}}{\ell!}$, qui est le terme général d'une série exponentielle convergente.

Ainsi, la série proposée converge absolument, donc converge. On a alors

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty}(-1)^{\ell-1}\frac{e^{-t\ell}}{\ell!} = 1 - e^{-e^{t}}.$$

2.2.7 Soit N_0 tel que pour tout $N \geqslant N_0$, on ait $\sum_{\ell=N_0}^{\infty}\frac{e^{-t\ell}}{\ell!} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (cette suite converge vers 0 d'après la question précédente).

Par **2.2.4**, on a alors

$$\left|\sum_{\ell=N_0}^{N}(-1)^{\ell+1}\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)}\right| + \sum_{\ell=N_0}^{\infty}\left|(-1)^{\ell-1}\frac{e^{-t\ell}}{\ell!}\right| \leqslant 2\sum_{\ell=N_0}^{\infty}\frac{e^{-t\ell}}{\ell!} \leqslant \varepsilon.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{P}(F_N > k_N(t)) - \sum_{\ell=1}^{\infty}(-1)^{\ell-1}\frac{e^{-t\ell}}{\ell!}\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{\ell=1}^{N_0-1}(-1)^{\ell+1}\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)} - \sum_{\ell=1}^{N_0-1}(-1)^{\ell-1}\frac{e^{-t\ell}}{\ell!}\right| + \left|\sum_{\ell=N_0}^{N}(-1)^{\ell+1}\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k}\right| + \left|\sum_{\ell=N_0}^{\infty}(-1)^{\ell-1}\frac{e^{-t\ell}}{\ell!}\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{\ell=1}^{N_0-1}(-1)^{\ell+1}\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)} - \sum_{\ell=1}^{N_0-1}(-1)^{\ell-1}\frac{e^{-t\ell}}{\ell!}\right| + \varepsilon
\end{aligned}$$

Soit alors $N_1 \geqslant N_0$ tel que pour tout $\ell \in [\![1, N_0-1]\!]$, $\left|\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)} - e^{-t\ell}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{N_0-1}$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\ell=1}^{N_0-1}(-1)^{\ell+1}\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)} - \sum_{\ell=1}^{N_0-1}(-1)^{\ell-1}\frac{e^{-t\ell}}{\ell!}\right| &\leqslant \sum_{\ell=1}^{N_0-1}\left|\binom{N}{\ell}\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{k_N(t)} - \sum_{\ell=1}^{N_0-1}\frac{e^{-t\ell}}{\ell!}\right| \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

On a donc alors le résultat voulu.