Problème 1

Partie A : Premier exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$

1. (a) Le déterminant de P est

$$\det(P) = -2 \times \frac{3}{5} - 2 \times \frac{1}{5} = -\frac{8}{5}.$$

$\det(P)$ est donc non nul, et P est inversible :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -2 \\ -\frac{1}{5} & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculons $P^{-1}AP$:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ \frac{3}{20} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 15 \\ -\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice $D = P^{-1}AP$ est donc diagonale, et donc $A = PDP^{-1}$.

2. (a) Au bout d'un an, toutes les oiselles jeunes disparaissent (soit elles meurent, soit elles deviennent adultes). Toutes les nouvelles oiselles jeunes sont donc de nouvelles naissances : il y en a une par jeune, et 5 par adulte, d'où $j_n + 5a_n$ oiselles jeunes.
Toutes les adultes meurent, et 15% des jeunes deviennent adultes, d'où $\frac{15}{100} j_n$ adultes à l'année suivante.
Finalement,

$$j_{n+1} = j_n + 5a_n \text{ et } a_{n+1} = \frac{15}{100} j_n = \frac{3}{20} j_n.$$

On a donc

$$AX_n = \begin{pmatrix} j_n + 5a_n \\ \frac{3}{20} j_n \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

(b) Montrons par récurrence la propriété $\varphi_n \ : \ X'_n = D^n X'_0$.

- φ_0 est clair, D^0 étant la matrice identité.
- Soit $n \in \mathbf{N}$, supposons φ_n. Alors

$$\begin{aligned} X'_{n+1} &= P^{-1} X_{n+1} \\ &= P^{-1} A X_n \text{ question 2a} \\ &= D P^{-1} X_n \text{ question 1b} \\ &= D X'_n \\ &= D D^n X'_0 \text{ par } \varphi_n \\ &= D^{n+1} X'_0 \end{aligned}$$

D'où φ_{n+1}.

Par théorème de récurrence, on a donc bien

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ X'_n = D^n X'_0.$$

(c) Supposons que $j_0 \neq 0$ et $a_0 \neq 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
X_n &= PX'_n \\
&= PD^n X'_0 \text{ question 2b} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\left(\frac{3}{2}\right)^n & 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^n & -\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 20\left(\frac{3}{2}\right)^n - 20\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 2\left(\frac{3}{2}\right)^n + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^n j_0 + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n j_0 + \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n a_0 - \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 \\ \frac{3}{40}\left(\frac{3}{2}\right)^n j_0 - \frac{3}{40}\left(-\frac{1}{2}\right)^n j_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^n a_0 + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc

$$j_n = \left(\frac{3}{4}j_0 + \frac{5}{2}a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}j_0 - \frac{5}{2}a_0\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Le premier terme tendant vers $+\infty$ et le second vers 0, on a donc

$$\frac{j_n}{\left(\frac{3}{4}j_0 + \frac{5}{2}a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 1 + \frac{\left(\frac{1}{4}j_0 - \frac{5}{2}a_0\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}j_0 + \frac{5}{2}a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n} \to 1,$$

et donc

$$j_n \sim \left(\frac{3}{4}j_0 + \frac{5}{2}a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

De la même façon,

$$a_n \sim \left(\frac{3}{40}j_0 + \frac{1}{4}a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Partie B : Second exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$

1. (a) On échelonne la matrice pour trouver, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\operatorname{rg}(B - \lambda I_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -3\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 - 3\lambda - 2 \end{pmatrix}.$$

On note alors que

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2,$$

et donc 2 et -1 sont bien les deux seules valeurs propres de B.

On a alors $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(B)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 3x - 8y = 0 \\ 2y - 6z = 0 \end{cases}$$

et donc $X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

De même, on a $X \in E_{-1}(B)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

et donc $X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}\right)$.

On a donc

$$E_2(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}8\\3\\1\end{pmatrix}\right) \text{ et } E_{-1}(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}\right).$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres de B vaut donc 2, et B n'est donc pas diagonalisable.

(b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à B.

Soient alors $e_1 = \begin{pmatrix}8\\3\\1\end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}$.

On cherche alors e_3 tel que $f(e_3) = e_2 - e_3$, c'est-à-dire, en posant $e_3 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} 4y + 4z = 4 - x \\ \frac{3}{4}x = -3 - y \\ \frac{2}{3}y = 2 - z \end{cases}$$

Alors $e_3 = \begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}$ convient.

On note que la famille (e_1, e_2, e_3) forme une base de $\mathbf{R}^3$, et la matrice de f dans cette base vaut bien T.
Ainsi, B et T représentent le même endomorphisme, et donc sont semblables.

(c) Écrivons $T = D + N$, avec

$$D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On note alors que D et N commutent, et que $N^2 = 0$. Par la formule du binôme de Newton, on a donc

$$\begin{aligned} T^n &= (D+N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\ &= D^n + nND^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\0 & (-1)^n & n(-1)^{n+1}\\0 & 0 & (-1)^n\end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Chaque oiselle préadulte et adulte va donner naissance à quatre oiselles jeunes, et donc

$$J_{n+1} = 4P_n + 4A_n.$$

Ensuite seulement trois quarts des jeunes deviennent préadultes, donc $P_{n+1} = \frac{3}{4}J_n$, et seulement deux tiers des préadultes deviennent adultes, et les oiselles déjà adultes meurent, donc $A_{n+1} = \frac{2}{3}P_n$.

On a alors

$$\begin{pmatrix}J_{n+1}\\P_{n+1}\\A_{n+1}\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}J_n\\P_n\\A_n\end{pmatrix}.$$

Or on a vu que B et T sont semblables, et il existe donc une matrice inversible Q telle que $B = QTQ^{-1}$.
On a alors, par récurrence immédiate $B^n = QT^nQ^{-1}$, et par récurrence

$$\begin{pmatrix}J_n\\P_n\\A_n\end{pmatrix} = QT^nQ^{-1}\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix}.$$

(b) On peut écrire, d'après la question B1c,

$$T^n = 2^n A_1 + (-1)^n A_2 + n(-1)^{n+1} A_3,$$

où $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors, par linéarité du produit matriciel

$$QT^nQ^{-1} = 2^n QA_1Q^{-1} + (-1)^n QA_2Q^{-1} + n(-1)^{n+1} QA_3Q^{-1},$$

et on a donc les matrices voulues en posant

$$C_1 = QA_1Q^{-1},\ C_2 = QA_2Q^{-1} \text{ et } C_3 = -QA_3Q^{-1}.$$

3. (a) Notons C_{ij} la j-ième ligne de la matrice C_i. On a alors pour tout n

$$\begin{aligned} J_n &= 2^n C_{11} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} + (-1)^n C_{21} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} + n(-1)^n C_{31} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} \\ &= 2^n \left(C_{11} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{2^n} C_{21} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} + \frac{n(-1)^n}{2^n} C_{31} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Par croissance comparée, la parenthèse tend vers $C_{11} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$, qui est non nul car J_0, P_0, A_0 et les coefficients de C_{11} sont strictement positifs.

Ainsi, on a bien $J_n \to \infty$.

On trouve de même :

$$\begin{aligned} P_n &= 2^n \left(C_{12} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{2^n} C_{22} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} + \frac{n(-1)^n}{2^n} C_{32} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} \right) \\ A_n &= 2^n \left(C_{13} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{2^n} C_{23} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} + \frac{n(-1)^n}{2^n} C_{33} \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

et pour les mêmes raisons que (J_n), les suites (P_n) et (A_n) divergent vers ∞.

(b) On note que $C_{12} = \frac{3}{8} C_{11}$ et $C_{13} = \frac{1}{8} C_{11}$, et la matrice C_1 est donc de rang 1.

On a de plus, d'après les expressions trouvées dans la question précédente,

$$\frac{J_n}{S_n} = \frac{2^n\left(C_{11}\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{2^n}C_{21}\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix} + \frac{n(-1)^n}{2^n}C_{31}\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix}\right)}{2^n\left((C_{11}+C_{12}+C_{13})\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{2^n}(C_{21}+C_{22}+C_{23})\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix} + \frac{n(-1)^n}{2^n}(C_{31}+C_{32}+C_{33})\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix}\right)}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{C_{11}\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix}}{(C_{11}+C_{12}+C_{13})\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix}}$$

$$= \frac{C_{11}\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix}}{\frac{3}{2}C_{11}\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

De même,

$$\frac{P_n}{S_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{C_{12}\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix}}{(C_{11}+C_{12}+C_{13})\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix}} = \frac{1}{4}.$$

On a aussi

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{2^n\left((C_{11}+C_{12}+C_{13})\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{2^n}(C_{21}+C_{22}+C_{23})\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix} + \frac{n(-1)^n}{2^n}(C_{31}+C_{32}+C_{33})\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix}\right)}{2^{n+1}\left((C_{11}+C_{12}+C_{13})\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(C_{21}+C_{22}+C_{23})\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix} + \frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(C_{31}+C_{32}+C_{33})\begin{pmatrix}J_0\\P_0\\A_0\end{pmatrix}\right)}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Problème 2

Partie A : Étude de trois fonctions

1. On a $\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in]0,1[^2 \mid x \neq y\}$, et donc

$$x \in \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow x \in]0,1[\text{ et } x \neq 1-x \Leftrightarrow x \in]0,1[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

2. (a) On a pour $(x,y) \in]0,1[^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = kx^{k-1}y - y^k \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^k - ky^{k-1}x.$$

Par dérivation des fonctions composées, le nombre dérivée cherché est donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{k-1}{2^{k-1}}$$

(b) On note que

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{2}\frac{f_k(x,1-x)-f_k\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}},$$

et la limite cherchée est donc le nombre dérivé de la question précédente multiplié par $\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\varphi_k(x)=\frac{k-1}{2^k}.$$

(c) Soit $(x,y)\in\mathcal{D}_1$. On a alors

$$\begin{aligned}xy\sum_{i=0}^{k-2}x^iy^{k-2-i}&=xy^{k-1}\sum_{i=0}^{k-2}\left(\frac{x}{y}\right)^i\\&=xy^{k-1}\frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{k-1}}{1-\frac{x}{y}}\quad\text{car }\frac{x}{y}\neq 1\\&=\frac{xy^{k-1}-x^k}{1\frac{x}{y}}\\&=g_k(x,y)\end{aligned}$$

(d) On retrouve alors directement la limite de φ_k en $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{1}{2}}\varphi_k(x)&=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{k-2}\frac{1}{2^{k-2}}\\&=\frac{k-1}{2^k}\end{aligned}$$

3. La fonction φ_k admet donc une limite finie en $\frac{1}{2}$, et donc est prolongeable par continuité en $\frac{1}{2}$.

4. (a) Si $x\neq\frac{1}{2}$, on a

$$\varphi_k(x)=\frac{x^k(1-x)-x(1-x)^k}{2x-1}\to 0$$

car $|x|<1$ et $|1-x|<1$.
Si $x=\frac{1}{2}$, alors la limite trouvée dans la question 2 montre que la limite cherchée est 0 aussi.
Finalement,

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=0.$$

(b) D'après la question 2c, on a donc

$$\begin{aligned}\varphi_k(x)&=x(1-x)\sum_{i=0}^{k-2}x^i(1-x)^{k-2-i}\\&=x(1-x)(1-x)^{k-2}+x(1-x)\sum_{i=1}^{k-2}x^i(1-x)^{k-2-i}\\&\geqslant x(1-x)^{k-1}\end{aligned}$$

(c) Reprenons l'identité de la question précédente

$$\begin{aligned}\varphi_{x+1}(x) &= x(1-x)(1-x)^{k-1} + x(1-x)\sum_{i=1}^{k-1} x^i(1-x)^{k-1-i} \\ &= x(1-x)^k + x(1-x)\sum_{i=0}^{k-2} x^{i+1}(1-x)^{k-1-i-1} \\ &= x(1-x)^k + x\varphi_k(x)\end{aligned}$$

(d) On a donc pour tout k

$$\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) = x(1-x)^k + (x-1) = (1-x)\left(x(1-x)^{k-1} - \varphi_k(x)\right).$$

D'après la question 4b, la suite est donc décroissante.

(e) Réutilisons une identité montrée à la question précédente : pour tout k

$$\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) = x(1-x)^k + (x-1) = (1-x)\left(x(1-x)^{k-1} - \varphi_k(x)\right).$$

Sommons ces égalités pour $k = 1$ à n ; la somme de gauche est téléscopique, et donc

$$\varphi_{n+1}(x) - \varphi_1(x) = (1-x)\sum_{k=1}^{n} x(1-x)^{k-1} - \varphi_k(x),$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) = \frac{1}{1-x}\left(\varphi_1(x) - \varphi_{n+1}(x) + x(1-x)\sum_{k=1}^{n}(1-x)^{k-1}\right).$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}(1-x)^{k-1} = \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)} \to \frac{1}{x},$$

et $\varphi_{n+1}(x) \to 0$ d'après la question 4a.

Finalement, la somme cherchée converge, et

$$\lim \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) = \frac{1}{1-x}1 - x = 1.$$

Partie B : Trois variables aléatoires réelles

1. (a) L'obtention de $\mathtt{p}$ à un lancer donné suit une loi binomiale de paramètre p, et les lancers sont indépendants. La variable T_p suit donc une loi géométrique de paramètre p.

   (b) Si on a eu un $\mathtt{f}$ au premier lancer, alors la seule solution pour obtenir $\mathtt{fp}$ au $k+1$-ième lancer est de n'avoir obtenu que des $\mathtt{f}$ pour les k premiers lancers, et un pile.
   Cet évènement a la même probabilité que celle de faire $k-1$ $\mathtt{f}$ puis un $\mathtt{p}$, et donc

$$\mathbb{P}_{\mathtt{f}_1}(T_{\mathtt{fp}} = k+1) = \mathbb{P}(T_{\mathtt{p}} = k).$$

   (c) La famille d'événements $(\mathtt{p}_1, \mathtt{f}_1)$ est un système complet d'événement, et on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{\mathtt{fp}} = k+1) &= \mathbb{P}_{\mathtt{f}_1}(T_{\mathtt{fp}} = k+1)\mathbb{P}(\mathtt{f}_1) + \mathbb{P}_{\mathtt{p}_1}(T_{\mathtt{fp}} = k+1)\mathbb{P}(\mathtt{p}_1) \\ &= (1-p)\mathbb{P}(T_{\mathtt{p}} = k) + p\mathbb{P}(T_{\mathtt{fp}} = k)\end{aligned}$$

   puisque si on a eu $\mathtt{p}$ au premier lancer, alors pour avoir $\mathtt{fp}$ au $k+1$-ème lancer, il faut l'obtenir au bout du k-ième en comptant à partir du deuxième.
   On retrouve alors le résultat demandé, car $T_{\mathtt{p}}$ suit une loi géométrique.

   (d) Montrons par récurrence la propriété ψ_k : « $\mathbb{P}(T_{\mathtt{fp}} = k) = \varphi_k(p)$ ».

- On a bien ψ_1, puisqu'il est clair que $\mathbb{P}(T_{\texttt{fp}} = 1) = 0$.
- Soit $k \in \mathbf{N}^*$; on suppose ψ_k. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{\texttt{fp}} = k+1) &= p(1-p)^k + p\mathbb{P}(T_{\texttt{fp}} = k) \quad \text{par la question B1c}\\ &= p(1-p)^k + p\varphi_k(p) \quad \text{par } \psi_k\\ &= \varphi_{k+1}(p) \quad \text{par la question A4c}\end{aligned}$$

On a donc bien montré, par récurrence, que

$$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \mathbb{P}(T_{\texttt{fp}} = k) = \varphi_k(p).$$

2. (a) Les événements $[T_{\texttt{fp}} = k]$ étant incompatibles, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}^*} T_{\texttt{fp}} = k\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_{\texttt{fp}} = k)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(p) \quad \text{par la question B1d}\\ &= 1 \quad \text{par la question A4ae}\end{aligned}$$

Ainsi, il est presque certain que le motif `fp` apparaisse.

(b) Si $p = \frac{1}{2}$, on a vu à la question A2b que $\varphi_k(\frac{1}{2}) = \frac{k-1}{2^k}$.
Ainsi, la série géométrique dérivée $\sum_{k\in\mathbf{N}^*} k\mathbb{P}(T_{\texttt{fp}} = k)$ converge bien, vers $4 = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}$.
Sinon, on a par définition de φ_k pour tout $N \in \mathbf{N}^*$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(T_{\texttt{fp}} = k) &= \sum_{k=1}^{N} k\varphi_k(p)\\ &= \sum_{k=1}^{N} k\frac{p^k(1-p) - p(1-p)^k}{2p-1}\\ &= \frac{1}{2p-1}\left(p\sum_{k=1}^{N} kp^{k-1}(1-p) - (1-p)\sum_{k=1}^{N}(1-p)^{k-1}p\right)\\ &\xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{p}{1-p} - \frac{1-p}{p}\right) \quad \text{en reconnaissant les espérances de lois géométriques}\\ &= \frac{1}{p(1-p)}\end{aligned}$$

Dans les deux cas, la série $\sum_{k\in\mathbf{N}^*} k\mathbb{P}(T_{\texttt{fp}} = k)$ converge absolument (les termes sont positifs), vers $\frac{1}{p(1-p)}$. La variable $T_{\texttt{fp}}$ admet donc une espérance, qui vaut $\frac{1}{p(1-p)}$.

3. (a) La famille proposée est bien un système complet d'événements, et donc pour $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{\texttt{pp}} = k+2) &= \mathbb{P}_{\texttt{f}_1}(T_{\texttt{pp}} = k+2)\mathbb{P}(\texttt{f}_1) + \mathbb{P}_{\texttt{p}_1\cap\texttt{p}_2}(T_{\texttt{pp}} = k+2)\mathbb{P}(\texttt{p}_1 \cap \texttt{p}_2) + \mathbb{P}_{\texttt{p}_1\cap\texttt{f}_2}(T_{\texttt{pp}} = k+2)\mathbb{P}(\texttt{f}_1 \cap \texttt{f}_2)\\ &= (1-p)\mathbb{P}(T_{\texttt{pp}} = k+1) + p^2 \times 0 + p(1-p)\mathbb{P}(T_{\texttt{pp}} = k)\end{aligned}$$

le premier cas revenant à compter à partir du deuxième lancer, le deuxième étant impossible puisqu'on a déjà tiré deux `p`, et le dernier revenant à compter à partir du troisième lancer.

(b) Le discriminant du polynôme vaut $(1-p)^2 + 4p(1-p) = (1-p)(3p+1) > 0$. On a donc bien deux racines réelles distinctes.
Ensuite, on a $P(1) = p^2$ et $P(-1) = 2 - 2p + p^2 = (p-1)^2 + 1$, et donc $P(1)$ et $P(-1)$ sont strictement positifs.
Ainsi, les racines r_1 et $r - 2$ sont nécessairement entre ces points.
De plus, les relations coefficients-racines nous donne

$$r_1 + r_2 = 1 - p \text{ et } r_1 r_2 = -p(1-p).$$

(c) On reconnait dans le résultat de la question B3a une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont le polynôme caractéristique est $X^2 - (1-p)X - p(1-p)$. Ce polynôme ayant deux racines réelles distinctes, il existe deux constantes réelles λ et μ telles que

$$\forall jk \in \mathbf{N}^*,\ \mathbb{P}(T_{\texttt{pp}} = k) = \lambda r_1^k + \mu r_2^k.$$

(d) Il est clair que $\mathbb{P}(T_{\texttt{pp}} = 1) = 0$ et $\mathbb{P}(T_{\texttt{pp}} = 2) = p^2$, et donc en reprenant l'expression précédente, on a

$$\lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \text{ et } \lambda r_1^2 + \mu r_2^2 = p^2.$$

On a donc $\lambda r_1^2 + \mu r - 1 r_2 = 0$, et par B3b,

$$\lambda r_1^2 = \mu p(1-p).$$

De même

$$\mu r_2^2 = \lambda p(1-p).$$

On a donc

$$p(1-p)(\lambda+\mu) = p^2,\ \text{puis } \lambda+\mu = \frac{p}{1-p}.$$

De plus, on a $r_1 = 1-p-r_2$ et $r_2 = 1-p-r_1$ par B3b, et donc

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda r_1 + \mu r_2 \\ &= (\lambda+\mu)(1-p) - \lambda r_2 - \mu r_1 \end{aligned}$$

et on retrouve

$$\lambda r_2 + \mu r_1 = (\lambda+\mu)(1-p) = p.$$

4. (a) Les événements étant disjoints, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup T_{\texttt{pp}} = k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_{\texttt{pp}} = k) = 1.$$

Ainsi, il est presque certain qu'on obtiendra la suite `pp`.

(b) Les deux série $\sum k r_1^k$ et $\sum k r_2^k$ convergent comme séries géométriques dérivées, car r_1 et r_2 sont dans $]-1,1[$. On a

$$\sum_{k=1}^{\infty} k r_1^k = \frac{r_1}{(1-r_1)^2} \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} k r_2^k = \frac{r_2}{(1-r_2)^2}.$$

Ainsi, par linéarité, $T_{\texttt{pp}}$ admet une espérance, et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_{\texttt{pp}}) &= \frac{\lambda r_1}{(1-r_1)^2} + \frac{\mu r_2}{(1-r_2)^2} \\ &= \frac{\lambda r_1(1-r_2)^2 + \mu r_2(1-r_1)^2}{((1-r_1)(1-r_2))^2} \\ &= \frac{(\lambda r_1 + \mu r_2) - 2r_1 r_2(\lambda+\mu) + r_1 r_2(\lambda r_2 + \mu r_1)}{(1-r_1)^2(1-r_2)^2} \\ &= \frac{2p(1-p)\left(\frac{p}{1-p}\right) - p(1-p)p}{(-p(1-p)-(1-p)+1)^2} \\ &= \frac{1+p}{p^2} \end{aligned}$$

Partie C : Deux jeux à pile ou face

1. (a) Si `p` sort au premier coup, Alice gagne. Sinon, `fp` sortira nécessairement avant ou au même moment que `p`. On a donc

$$\mathbb{P}(A) = p \text{ et } \mathbb{P}(B) = 1-p.$$

(b) Ainsi, Bérénice a une plus grande probabilité de victoire si et seulement si $p < \frac{1}{2}$.

2. (a) On a vu que les suites `fp` et `pp` arrivent de façon presque sûre, et ne peuvent arriver au même instant. Ainsi, (B, C) forme un système complet d'événement.

   (b) On distingue deux cas :

   - si le premier lancer donne `f` (probabilité $1 - p$), alors Bérénice gagnera nécessairement, dès que le premier `p` apparaitra.
   - si le premier lancer donne `p`, alors on distingue deux sous-cas :
     - si le deuxième lancer donne pile (probabilité p^2), alors Candice gagne.
     - si le deuxième lancer donne face (probabilité $p(1-p)$), alors on revient au premier cas, et Bérénice gagne.

   Finalement, $\mathbb{P}(C) = p^2$.
   Ainsi, Bérénice a une plus grande probabilité de gagner si et seulement si $p < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

   (c) D'après B2b et B4b, les temps d'attente moyens de `fp` et `pp` valent respectivement $\frac{1}{p(1-p)}$ et $\frac{1+p}{p^2}$.

   Ainsi, pour $p > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0.6$, le temps d'attente de `fp` est strictement plus grand que celui de `pp`.
   Mais d'après la question précédente, Bérénice a plus de chance de gagner dès que $p < \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7$.

   Ainsi, pour p entre ces deux valeurs, *e.g.* $p = 0.65$, la victoire de Bérénice est pluys probable, mais le temps d'attente de `fp` est en moyenne plus long que celui de `pp`.