Mathématiques

G2E

2017

PROBLÈME 1

Partie A : Étude de deux séries réelles

1. La série A est divergente et la série B convergente.

2. (a) Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$
   (b) La fonction ln est bien continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert, donc il existe $c \in]x, x+1[$ tel que
$$\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c}(x+1-x) = \frac{1}{c}.$$
   Comme $x \leqslant c \leqslant x+1$, on a bien le résultat voulu par décroissance de la fonction inverse.
   (c) Pour $x = k$, on a donc $\frac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln(k)$, puis pour $x = k-1$, on a $\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$. Finalement
$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1).$$
   En sommant ces inégalités pour k allant de 2 à n, on a donc par somme téléscopique
$$\ln(n+1) - \ln(2) \leqslant A_n - 1 \leqslant \ln(n)$$
   et il suffit d'ajouter 1 pour obtenir le résultat voulu, $1 - \ln(2)$ étant positif.
   (d) On note que $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \to 1$, et donc par théorème d'encadrement des limites, on a bien $\frac{A_n}{\ln(n)} \to 1$, et donc l'équivalent demandé.

3. (a) On a $A_4 = \frac{25}{12}$, donc $A_4 - \ln(4) \geqslant 2 - 1,4 = 0,6$. De même, $v_4 = \frac{11}{6} - 2\ln(2) \leqslant 2 - 1,3 = 0,7$.
   (b) On a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \geqslant 0$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leqslant 0$$
   Ainsi, la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) décroissante. On a de plus
$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \to 0.$$
   Les deux suites sont donc adjacentes, et convergent donc vers le même réel ℓ. On a alors pour tout n
$$v_n \leqslant \ell \leqslant u_n.$$
   Pour $n = 4$, on a donc par la question 3a : $0,4 \leqslant \ell \leqslant 0,8$.

4. (a) Il suffit de (et il faut) prendre $a = -1$ et $b = 1$.
   (b) On a

$$\begin{aligned}\frac{2}{k^2} - \frac{1}{k(k-1)} &= \frac{k-2}{k^2(k-1)} \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

   Les séries $\sum \frac{1}{k(k-1)}$ et $\sum \frac{2}{k^2}$ sont à termes positifs, et $\sum \frac{2}{k^2}$ converge, donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{k(k-1)}$ converge.
   (c) On a alors par 4a et somme télescopique

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1.$$

   On en déduit alors, comme $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$,

$$B_n \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 2.$$

Partie B : 3 cadeaux

1. (a) À l'issue de la première victoire, on a donc une probabilité $\frac{1}{3}$ que la bille soit sur la zone 1.
   (b) Les tirages étant indépendants, la probabilité demandée vaut $\frac{2}{3}$.
2. (a) Le nombre de fois où la bille se trouve en zone 1 suit donc une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{3}$. La probabilité cherchée vaut donc

$$\binom{4}{3}\frac{1}{3^3}\frac{2}{3} + \binom{4}{4}\frac{1}{3^4} = \frac{1}{9}.$$

   (b) En 4 tirages, on a $3^4 = 81$ possibilités, dont $\binom{3}{2}\binom{4}{2} = 18$ correspondant à la situation demandée. La probabilité cherchée vaut donc $\frac{18}{81} = \frac{2}{9}$.
3. Pour ne pas gagner la super cagnotte, il faut et il suffit d'être dans une des situations suivantes, deux à deux incompatibles
   - la zone 1 a été atteinte au moins trois fois, avec probabilité $\frac{1}{9}$
   - la zone 2 a été atteinte au moins trois fois, avec probabilité $\frac{1}{9}$
   - la zone 3 a été atteinte au moins trois fois, avec probabilité $\frac{1}{9}$
   - deux zones ont été atteintes chacune exactement deux fois, avec probabilité $\frac{18}{81}$.

   Finalement, la probabilité cherchée vaut

$$1 - \frac{3}{9} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}.$$

Partie C : n cadeaux

1. (a) Lors du premier tirage, on obtient nécessairement un numéro non tiré. On a donc $T_1 = 1$ presque sûrement, et donc $\mathbb{E}(T_1) = 1$.

(b) On a $\mathrm{Im}(T_2) = \mathbb{N}^*$ (il faut au moins un tirage supplémentaire, et on pourrait ne tirer que le même numéro qu'au premier tirage). On a alors

$$\mathbb{P}(T_2 > 1) = 1 - \mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{n},$$

la probabilité $\mathbb{P}(T_2 = 1)$ étant celle de tirer un numéro différent de celui obtenu au premier tirage.

2. (a) Supposons que $i-1$ cadeaux différents ont déjà été gagnés. On considère alors l'expérience de Bernoulli « Un nouveau cadeau est gagné lors de la $n$ème victoire supplémentaire ». Ces expériences sont indépendantes et de même probabilité $\frac{n-i+1}{n}$, et T_i correspond au rang du premier succès. Ainsi, $T_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$.

   (b) L'espérance et la variance d'une loi géométrique de paramètre p étant respectivement $\frac{1}{p}$ et $\frac{1-p}{p^2}$, on a bien le résultat voulu.

3. (a) Pour gagner n cadeaux, il suffit d'ajouter le nombre de victoires nécessaires pour obtenir le premier, puis le second, *etc.* jusqu'au $n$ème.

   (b) Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1}\\ &= n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\end{aligned}$$

   par le changement d'indice $j = n+1-i$. On reconnait alors $\mathbb{E}(S_n) = nA_n$.

   (c) On a donc
$$\mathbb{E}(S_{16}) = 16A_{16} \leqslant 16\ln(16) + 16 = 16 \times 4\ln(2) + 16 \leqslant 60{,}8 \leqslant 61.$$

4. (a) Montrons-le par récurrence
   - Si $n = 1$, il est clair que la famille est indépendante.
   - Supposons les k premiers T_i indépendants. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([T_1 = t_1] \cap \cdots \cap [T_{k+1} = t_{k+1}]) &= \mathbb{P}([T_1 = t_1] \cap \cdots \cap [T_k = t_k])\mathbb{P}_{[T_1=t_1]\cap\cdots\cap[T_k=t_k]}(T_{k+1} = t_{k+1})\\ &= \mathbb{P}(T_1 = t_1)\cdots\mathbb{P}(T_k = t_k)\mathbb{P}(T_{k+1} = t_{k+1})\end{aligned}$$

     les victoires étant supposées indépendantes; le nombre de victoires pour obtenir le $k+1$-ème cadeau ne dépendant donc pas du nombre de victoires pour obtenir les précédents.

   (b) On a donc par indépendance

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_n) &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(T_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{n(i-1)}{(n-i+1)^2}\\ &= n\sum_{j=1}^{n}\frac{n-j}{j^2} \quad \text{par changement d'indice } j = n-i+1\\ &= n^2B_n - nA_n\end{aligned}$$

   On a alors $\mathbb{V}(S_n) = n^2(B_n - \frac{A_n}{n})$, avec (B_n) qui converge et $\frac{A_n}{n} \to 0$ par A2d et croissances comparées.
   Ainsi, $\mathbb{V}(S_n) \to +\infty$.

   (c) On a pour tout n : $B_n \leqslant 2$ et $-nA_n \leqslant 0$, d'où $\mathbb{V}(S_n) \leqslant 2n^2$.

5. (a) La variable S_n admet une variance, donc par inégalité de Bienaymé Tchebytchev, on a

$$\mathbb{P}(|S_n - nA_n| \geqslant n\alpha) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2\alpha^2} \leqslant \frac{2}{\alpha^2}.$$

   (b) On a alors

$$\mathbb{P}(|S_n - nA_n| \leqslant n\alpha) \geqslant 1 - \frac{2}{\alpha^2}.$$

   On choisit alors $\alpha = 10$, de sorte que $1 - \frac{2}{\alpha^2} = 0,98$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{16} \leqslant 220) &\geqslant \mathbb{P}(|S_{16} - nA_{16}| \leqslant 160) \\ &\geqslant 0,98 \end{aligned}$$

   Ainsi, avec 220 victoires, la probabilité d'obtenir les 16 cadeaux est supérieure à 98%.

PROBLÈME 2

Partie A : Premier exemple dans $\mathbb{R}^2$

1. On a une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{1}{9} = \left(X - \frac{1}{3}\right)^2$; l'unique racine est donc $\frac{1}{3}$.

   Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{t \mapsto (at+b)e^{\frac{t}{3}} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. (a) La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

   Soit ensuite pour tout n la proposition ψ_n :« $\exists a_n, b_n \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi^{(n)}(t) = (a_n t + b_n)e^{\frac{t}{3}}$ ». Montrons cette proposition par récurrence sur n.

   - On a bien ψ_0 avec $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose ψ_n. Alors la fonction $\varphi^{(n)}$ est dérivable, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi^{(n+1)}(t) = \left(\frac{a_n}{3} + a_n + \frac{1}{3}b_n\right)e^{\frac{t}{3}},$$

     et on a bien ψ_{n+1} avec $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$ et $b_{n+1} = a_n + \frac{1}{3}b_n$.

   Finalement, par récurrence, on a bien la forme demandée pour $\varphi^{(n)}$.

   (b) On note que pour tout n, $\varphi^{(n)}$ est solution de l'équation différentielle de la question 1A ; ainsi on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$(a_{n+2}t + b_{n+2})e^{\frac{t}{3}} = \frac{2}{3}(a_{n+1}t + b_{n+1})e^{\frac{t}{3}} - \frac{1}{9}(a_n t + b_n)e^{\frac{t}{3}}.$$

   L'exponentielle étant non nulle, on a donc

$$a_{n+2}t + b_{n+2} = \left(\frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{1}{9}a_n\right)t + \frac{2}{3}b_{n+1} - \frac{1}{9}b_n.$$

   On a égalité entre deux fonctions polynomiales, et on peut donc identifier les coefficients pour retrouver les relations de récurrence proposées.

(c) On en vu en A2a que (a_n) était une suite géométrique de premier terme a et de raison $\frac{1}{3}$, et donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = a\frac{1}{3^n}.$$

Ensuite, la suite (b_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, de polynôme caractéristique $(X - \frac{1}{3})^2$. Ainsi, il existe deux constantes λ et μ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = (\lambda n + \mu)\frac{1}{3^n}.$$

Avec les conditions $b_0 = b$ et $b_1 = \frac{b}{3} + a$, on obtient $\lambda = 3a$ et $\mu = b$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{b}{3^n} + \frac{na}{3^{n-1}}.$$

3. (a) *L'énoncé suggère plutôt d'utiliser la relation de récurrence de A2b pour trouver la matrice A, mais la suite (a_n) étant géométrique, on pourrait très bien choisir $A = \frac{1}{3}I_2$.*

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\frac{1}{9}AX_n = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9a_{n+1} \\ -a_n + 6a_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λ est valeur propre de A si et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$, *i.e.* $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Ainsi, seule 3 est valeur propre de A, et on a bien $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \mathbb{R}_+$.

(c) On a $f(-2,1) = (9,-13)$, et donc $(-2,1)\cdot f(-2,1) = -31 < 0$.
Ainsi, f ne vérifie pas (P).

Partie B : Une projection orthogonale dans $\mathbb{R}^3$

1. (a) On montre facilement que $\ker(f) = \mathrm{Vect}((2,-1,1))$. Ensuite, si $x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, alors on a

$$f(x) - x = \frac{1}{6}(-4a + 2b - 2c, 2a - b + c, -2a + b - c) = \frac{1}{6}(-2a + b - c)(2,-1,1),$$

et on a donc bien $f(x) - x \in \ker(f)$.

(b) On a

$$\begin{aligned}
(a,b,c) \in \mathrm{Im}(f) &\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = (a,b,c) \\
&\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 6a \\ 2x + 5y + z = 6b \\ -2x + y + 5z = 6c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 6a \\ 3y + 3z = 6b - 6a \\ 3y + 3z = 6c + 6a \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 6a \\ 3y + 3z = 6b - 6a \\ 0 = 12a - 6b + 6c = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow 2a - b + c = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, on reconnaît une équation de plan : on a

$$\mathrm{Im}(f) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a - b + c = 0\},$$

qui est bien une équation cartésienne de plan.
Un vecteur normal à ce plan est donc $(2,-1,1)$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Par définition on a bien $f(x) \in \mathcal{P}$.
De plus, on a bien pour tout y de $\mathcal{P}$, y et $f(x) - x$ sont bien orthogonaux, puisque $f(x) - x \in \ker(f) = \mathrm{Vect}((2, -1, 1))$ qui est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
f est donc bien la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.

2. La distance de x au plan $\mathcal{P}$ est la distance entre x et son projeté $f(x)$:

$$\begin{aligned} d(x, \mathcal{P}) &= d(x, f(x)) \\ &= \|x - f(x)\| \\ &= \|\frac{1}{6}(-2x_1 + x_2 - x_3)(2, -1, 1)\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}|2x_1 - x_2 + x_3| \end{aligned}$$

Cette distance étant minimale parmi les distances entre x et un point de $\mathcal{P}$, on a donc

$$d(x, \mathcal{P}) \leqslant d(x, 0) = \|x\|.$$

On retrouve alors l'inégalité demandée.

3. Il suffit d'élever l'inégalité précédente au carré, la fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, et toutes les quantités étant positives.

$$\frac{1}{6}(2x_1 - x_2 + x_3)^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

et on retrouve bien le résultat demandé.

4. On vérifie que

$$x \cdot f(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - (-4x_1x_+2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3) \geqslant 0$$

par la question précédente.
Ainsi, la fonction f vérifie (P).

Partie C : Deux exemples dans $\mathbb{R}^n$

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est X.
On a alors en identifiant les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x \cdot f(x) &= {}^{\mathbf{t}}X(AX) && \text{par définition du produit scalaire} \\ &= {}^{\mathbf{t}}({}^{\mathbf{t}}AX)X && \text{par propriété de la transposée} \\ &= f^*(x) \cdot x \\ &= x \cdot f^*(x) && \text{par symétrie sur produit scalaire} \end{aligned}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$.
Supposons que f vérifie (P). On a alors $x \cdot f(x) \geqslant 0$, et donc $x \cdot f^*(x) \geqslant 0$, et par linéarité à droite du produit scalaire, $x \cdot (f + f^*)(x) \geqslant 0$; $f + f^*$ vérifie (P).
Supposons maintenant que $f + f^*$ vérifie (P). On a donc $x \cdot f(x) \ + x \cdot f^*(x) \geqslant 0$, et par la question précédente, $2x \cdot f(x) \geqslant 0$. Ainsi, f vérifie (P).
Finalement, f vérifie (P) si et seulement si $f + f^*$ vérifie (P).

(c) On a par linéarité de la transposée ${}^{\mathbf{t}}(A + {}^{\mathbf{t}}A) = A + {}^{\mathbf{t}}A$, et la matrice $A + {}^{\mathbf{t}}A$ est donc symétrique réelle; par le théorème spectral, elle est diagonalisable en base orthonormée : il existe une matrice Q telle que $Q^{-1} = {}^{\mathbf{t}}Q$ et $A + {}^{\mathbf{t}}A = QDQ^{-1}$.

(d) Commençons par noter que pour toute matrice colonne X, on a

$$^{\mathbf{t}}X(A+{}^{\mathbf{t}}A)X = {}^{\mathbf{t}}({}^{\mathbf{t}}QX)D({}^{\mathbf{t}}QX).$$

Supposons que f vérifie (P). Alors $f+f^*$ aussi, et donc par la remarque précédente, on a pour tout vecteur colonne Y, ${}^{\mathbf{t}}YDY \geqslant 0$.
En notant λ_i les coefficients diagonaux de D, et a_i les coefficients de Y, on a donc

$$\sum_{i+1}^{n} a_i^2\lambda_i \geqslant 0.$$

Ceci étant vrai pour tous a_i, on a $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout i. Ces réels étant les valeurs propres de $f+f^*$, son spectre est bien inclus dans $\mathbb{R}_+$.
Réciproquement, si toutes les valeurs propres de $f+f^*$ sont dans $\mathbb{R}_+$, alors d'après la première remarque, on a

$$^{\mathbf{t}}X(A+{}^{\mathbf{t}}A)X \geqslant 0,$$

et donc $f+f^*$ vérifie (P), et donc f aussi par la question C1b. On a bien montré que f vérifie (P) si et seulement si $\mathrm{Sp}(f+f^*) \subseteq \mathbb{R}_+$.

2. (a) On a $B+{}^{\mathbf{t}}B = A$, et donc d'après la question C1b, $g = f+f^*$ vérifie (P) si et seulement si f aussi.

   (b) B est triangulaire, et son spectre est donc $\mathrm{Sp}(g) = \{1\}$.
   Or le rang de $B - I_n$ vaut $n-1$, et donc $\dim E_1(g) = 1$. L'endomorphisme g n'est donc pas diagonalisable.

   (c) La matrice $A - I$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1, qui est donc de rang 1.
   Ainsi, 1 est valeur propre de A, et la dimension de $E_1(A)$ vaut $n-1$ par le théorème du rang.
   On note de plus que $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = (n+1)\begin{pmatrix} \\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, et donc $(n+1)$ est valeur propre de A.
   Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut dépasser n, on a nécessairement $\dim E_{n+1}(A) = 1$, puis $\mathrm{Sp}(A) = \{1, n+1\}$.
   On en déduit que :
   - f est diagonalisable
   - $\mathrm{Sp}(g+g^*) =^(f) = \{1, n+1\} \subseteq \mathbb{R}_+$, et donc $g+g^*$, et donc f vérifient (P).

3. (a) Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$.
   - si $i \neq j$, par indépendance, on a

   $$\mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = 1.$$

   - si $i = j$, on a

   $$\mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{E}(X_i^2) = \mathbb{V}(X_i) + \mathbb{E}(X_i)^2 = 2.$$

   On retrouve bien les coefficients de la matrice A.

   (b) Dans cette question, on note f_n l'endomorphisme f en dimension n.
   Commençons par noter que pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on a

$$\begin{aligned} x \cdot f(x) = & 2x_1^2 + x_1x_2 + \cdots + x_1x_n \\ & + x_1x_2 + 2x_2^2 + \cdots + x_2x_n \\ & + \cdots \\ & + x_1x_n + \cdots + x_{n-1}x_n + 2x_n^2 \end{aligned}$$

   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété donnée.

- pour $n=1$, on a bien pour $x=(x_1)$,
$$x \cdot f_1(x) = 2x_1^2$$
et
$$\mathbb{E}((x_1X_1)^2) = x_1^2\mathbb{E}(X_1^2) = 2x_1^2.$$
- soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons la propriété vraie pour ce n. Soit $x=(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Alors
$$\begin{aligned} x \cdot f_{n+1}(x) &= (x_1,\dots,x_n)\cdot f_n(x_1,\dots,x_n) + x_{n+1}(x_1+\dots+x_n+2x_{n+1}) + x_1x_{n+1}+\dots+x_nx_{n+1} \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n x_iX_i\right)^2\right) + 2x_1x_{n+1}+\dots+2x_nx_{n+1}+2x_{n+1}^2 \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_iX_i\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n x_iX_i\right)^2 + x_{n+1}^2\mathbb{E}(X_{n+1}^2) + 2x_{n+1}X_{n+1}\sum_{i=1}^n x_iX_i\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n x_iX_i\right)^2\right) + 2x_{n+1}^2 + 2x_1x_{n+1}+\dots+2x_nx_{n+1} \end{aligned}$$
par lemme de coalition : X_{n+1} et $\sum\limits_{i=1}^n x_iX_i$ sont indépendantes.
On a bien l'égalité voulue.

Par récurrence, on a donc bien le résultat voulu.

(c) Ainsi, par positivité de l'espérance, on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot f(x) \geqslant 0$: l'endomorphisme f vérifie (P).