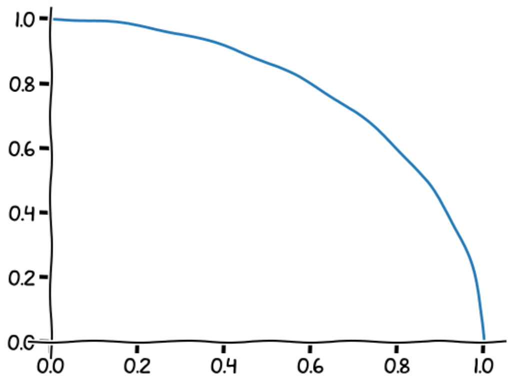
G2E

2022

Problème 1

Partie A : Calculs d'intégrales par différentes méthodes

1. (a) L'équation du cercle $\mathcal{C}$ est donnée par
$$x^2 + y^2 = 1.$$
   (b) On note que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x)^2 + x^2 = 1$, et donc la courbe représentative de f est une portion de cercle.
   Comme x va de 0 à 1, c'est un quart de cercle :



   (c) Les fonctions $x \mapsto 1 - x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues sur $[0,1]$, donc leur composée f aussi (on a bien $1 - x^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in [0,1]$).
   De plus, $\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, donc f l'est sur $[0,1[$.
   On a alors
$$\forall x \in [0,1[,\ f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. (a) L'aire du disque de centre 0 et de rayon 1 est de π, et donc l'intégrale de f sur $[0,1]$, qui représente l'aire d'un quart de disque, vaut $\frac{\pi}{4}$.

3. (a) On a

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta).$$

On en déduit

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin^2(\theta) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\theta)\right).$$

(b) Le changement de variable proposé est bien de classe $\mathcal{C}^1$, et on a par théorème de changement de variables

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos^2(\theta)}(-s \in (\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(\theta)|\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1-\cos(2\theta)\right)\mathrm{d}\theta \quad \text{car sin est positive sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\
&= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

4. (a) La fonction intégrée est continue en 0, mais l'intégrale est impropre en 1. Soit donc $u \in [0,1[$. Les fonctions $x \mapsto -x$ et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,u]$, donc par théorème d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_0^u \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= \int_0^u -xf'(x)\mathrm{d}x \\
&= [-xf(x)]_0^u + \int_0^u f(x)\mathrm{d}x \\
&\xrightarrow[u\to 1]{} \frac{\pi}{4} \quad \text{par les questions 2 et 3}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale converge et vaut $\frac{\pi}{4}$.

(b) On note que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ainsi, par linéarité de l'intégrale, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ converge, et vaut $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

(c) On peut aussi refaire le changement de variable $x = \cos(\theta)$. On aurait alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Partie B : Trigonométrie réciproque

5. (a) On a $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$.
De la même façon, on trouve $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $\arccos(1) = 0$.

(b) Pour $c \in [0,1]$, on a $\cos(\arccos(c)) = c$. Ainsi, l'équation est équivalente à $\cos(x) = \cos(\arccos(c))$, dont les solutions sont données par

$$x = \arccos(c) + 2\pi \text{ ou } x = -\arccos(c) + 2\pi.$$

6. (a) On a alors, pour $u \in [0,1[$:

$$\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = [-\arccos(x)]_0^u \xrightarrow[u\to 1]{} \frac{\pi}{2}.$$

(b) Soit donc $[a,b] \subseteq [0,1]$. Les fonctions $x \mapsto x$ et arccos sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, donc par théorème d'intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b \arccos(x)\mathrm{d}x &= [x\arccos(x)]_a^b + \int_a^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= b\arccos(b) - a\arccos(a) - [f(x)]_a^b \\ &= b\arccos(b) - a\arccos(a) + \sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-b^2}\end{aligned}$$

Partie C : Avec deux variables aléatoires à densité

7. (a) Si l'angle $(\overrightarrow{CL}, \overrightarrow{CA}$ était supérieur à $\frac{\pi}{2}$, alors l'angle $(\overrightarrow{CL}, \overrightarrow{CB})$ serait lui entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
Le problème étant symétrique par rapport à l'axe des abscisses, on peut donc supposer sans perte de généralité que $Y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) La variable $-X$ suit une loi uniforme sur $[-\ell, 0]$. Une densité est alors donnée par

$$f_{-X} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & \text{si } x \in [-\ell, 0] \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \end{array} .$$

8. Notons D l'intersection de la droite (AB) avec l'axe des ordonnées. On a alors $T = [DC \leqslant 1]$.
Or dans le triangle rectangle COD, on a par le théorème de Pythagore

$$X^2 + OD^2 = DC^2.$$

Or on a dans ce même triangle $\sin(Y) = \frac{OD}{DC}$, et donc $OD = DC\sin(Y)$.
Finalement, on a donc

$$X^2 = DC^2\left(1 - \sin^2(Y)\right) = \cos^2(Y)DC^2.$$

Ainsi, $DC \leqslant 1$ si et seulement si $\frac{X^2}{\cos^2(X)} \leqslant 1$, c'est-à-dire $X \leqslant \cos(Y)$, toutes les quantités étant positives.
Donc l'événement T est réalisé si et seulement si $\cos(Y) - X \geqslant 0$.

9. (a) Y suit une loi uniforme sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(Y) \in [0,1]$.
On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   - si $t < 0$, alors $\mathbb{P}(\cos(Y) \leqslant t) = 0$;
   - si $t > 1$, alors $\mathbb{P}(\cos(Y) \leqslant t) = 1$;
   - si $t \in [0,1]$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cos(Y) \leqslant t) &= \mathbb{P}(Y \geqslant \arccos(t)) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y < \arccos(t)) \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}\arccos(t)\end{aligned}$$

(b) On a $\arccos(0) = 1$ et $\arccos(1) = 0$, et donc la fonction de répartition de $\cos(Y)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, elle y est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0 et 1.
La variable $\cos(Y)$ est donc une variable à densité, dont une densité est donnée par

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si non} \end{cases} \end{array} .$$

10. (a) $\cos(Y)$ prend ses valeurs dans $[0,1]$ et X dans $[0,\ell]$, donc $\cos(Y) - X$ prend ses valeurs dans $[-\ell, 1]$.

(b) Soit une densité h de $\cos(Y) - X$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t \notin]0, 1[$, on a $g(t) = 0$.
Si $t \notin]x, x + \ell[$, alors $f_{-X}(x - t) = 0$.
Finalement, si $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -\ell$, on a $h(x) = 0$.
Sinon, soit donc $x \in [0, 1]$ (seule la densité sur $\mathbb{R}_+$ nous intéresse ici). On note que $]0, 1[\cap]x, x + \ell[=]x, 1[$, et donc

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_x^1 \frac{2}{\pi\sqrt{1 - t^2}} \frac{1}{\ell} \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi\ell} \left(\arccos(x) - \arccos(1)\right) \\ &= \frac{2}{\pi\ell} \arccos(x) \end{aligned}$$

Finalement, on peut calculer

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(\cos(Y) - X \geqslant 0) \quad \text{(question 8)} \\ &= \int_0^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x \quad \text{(question 9a)} \\ &= \int_0^1 \frac{2}{\pi\ell} \arccos(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi\ell} \quad \text{(question 6b)} \end{aligned}$$

Problème 2

Partie A : Matrices symétriques et antisymétriques

1. (a) La transposée de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, et donc on a bien l'équivalence demandée.

(b) On a bien $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et la matrice nulle est symétrique.
Enfin, par linéarité de la transposition, si A et B sont symétriques et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(A + \lambda B)^{\mathbf{T}} = A^{\mathbf{T}} + \lambda B^{\mathbf{T}} = A + \lambda B$, et donc $A + \lambda B$ est symétrique.
Ainsi, $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
D'après la question précédente, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ engendrent $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, et forment une famille libre. Elles forment donc une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

2. (a) On a

$$A^{\mathbf{T}} A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \varepsilon\sin(\theta) & -\varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $A^{\mathbf{T}} A = I_2$.

(b) Supposons donc $X^{\mathbf{T}}Y = 0$. On a alors $(AX)^{\mathbf{T}}(AY) = X^{\mathbf{T}}A^{\mathbf{T}}A\,Y = 0$.
AX et AY sont donc bien orthogonaux.

3. (a) $J \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ avec $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $\varepsilon = -1$.
On a alors $J^2 = -I_2$.

(b) Si J était diagonalisable, alors J aurait une valeur propre réelle λ, avec un vecteur propre X. On aurait alors $JX = \lambda X$, puis $J^2X = \lambda^2 X$.
On en déduit alors, comme $X \neq 0$, $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible.

4. (a) Il est clair que $\mathcal{A}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(J)$, et donc $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de dimension 1 et de base (J).

(b) La matrice I_2 est symétrique, la matrice J est antisymétrique, mais leur somme n'est ni symétrique, ni antisymétrique.
Ainsi, l'union proposée n'est pas un espace vectoriel, donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie B : Matrices qui commutent avec leur transposée

5. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas dans $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$.

6. (a) Si M est symétrique, alors $MM^{\mathbf{T}} = M^2 = M^{\mathbf{T}}M$, donc $M \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R})$.
Si M est antisymétrique, alors $MM^{\mathbf{T}} = -M^2 = M^{\mathbf{T}}M$, donc $M \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R})$.
Si $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, alors $MM^{\mathbf{T}} = I_2 = M^{\mathbf{T}}M$.
On a donc bien l'inclusion demandée.

(b) On vérifie facilement que $I_2 + J$ commute avec sa transposée. En revanche, cette matrice n'est ni symétrique ni antisymétrique. Montrons qu'elle n'est pas dans $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
On note que pour les matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, la somme des carrés des coefficients de la première colonne doit faire 1, ce qui n'est pas le cas pour $I_2 + J$, qui n'est donc pas dans $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$.

7. (a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors

$$AA^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} \text{ et } A^{\mathbf{T}}A = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

Si $A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R})$, on a donc $b^2 = c^2$, et donc $b = c$ ou $b = -c$. Dans le second cas, on a alors $ac - cd = -ac + cd$, et donc $a = d$.
Réciproquement, si l'une de ces deux conditions est réalisée, la matrice est bien dans $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$.

(b) Ainsi, les matrices de $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$ sont exactement celles de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
Le premier cas correspond aux matrices symétriques, et le second cas aux combinaisons linéaires de I_2 et J.

(c) Soit alors A dans l'intersection. Alors comme $A \in \mathrm{Vect}(I_2, J)$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
Comme A est aussi symétrique, on a donc $b = -b$, donc $b = 0$. Ainsi, A est dans $\mathrm{Vect}(I_2)$.
Réciproquement, toutes les matrices de $\mathrm{Vect}(I_2)$ sont dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_2, J)$, et finalement

$$\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_2, J) = \mathrm{Vect}(I_2).$$

8. (a) Soit donc $i \in [\![1, 4]\!]$. La variable X_i^2 prend donc les valeurs 0 ou 1, donc suit une loi de Bernoulli.
On a alors $\mathbb{P}(X_i^2 = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1 \cup X_i = -1) = \frac{2}{3}$ par incompatibilité.
On a donc $X_i^2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right)$.

(b) Soient donc $i \neq j$ dans $[\![1,4]\!]$. Alors X_iX_j peut prendre les valeurs -1, 0 ou 1.
On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_iX_j = -1) &= \mathbb{P}((X_i = 1 \cap X_j = -1) \cup (X_i = -1 \cap X_j = 1)) \\ &= \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = -1) + \mathbb{P}(X_i = -1)\mathbb{P}(X_j = 1) \quad \text{par incompatibilité et indépendance} \\ &= \frac{2}{9}\end{aligned}$$

De même, on trouve $\mathbb{P}(X_iX_j = 1) = \frac{2}{9}$, et on en déduit $\mathbb{P}(X_iX_j = 0) = \frac{5}{9}$.

(c) On a $\det(A) = X_1X_4 - X_2X_3$. Ainsi, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\det(A) = 0) &= \mathbb{P}(X_1X_4 = X_2X_3) \\ &= \mathbb{P}(X_1X_4 = -1 \cap X_2X_3 = -1) + \mathbb{P}(X_1X_4 = 0 \cap X_2X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1X_4 = 1 \cap X_2X_3 = 1) \\ &\quad\quad \text{par incompatibilité} \\ &= \frac{2}{9}\frac{2}{9} + \frac{5}{9}\frac{5}{9} + \frac{2}{9}\frac{2}{9} \quad \text{par lemme de coalition et indépendance} \\ &= \frac{11}{27}\end{aligned}$$

9. (a) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})) &= \mathbb{P}(X_2 = X_3) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = -1 \cap X_3 = -1) + \mathbb{P}(X_2 = 0 \cap X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 1 \cap X_3 = 1) \\ &= \frac{1}{3} \quad \text{par indépendance}\end{aligned}$$

(b) On trouve de même

$$\mathbb{P}(A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(X_1 = 0 \cap X_2 = -X_3 \cap X_4 = 0) = \frac{1}{27}.$$

10. (a) On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R})) &= \mathbb{P}(A \in S_2(\mathbb{R}) \cup A \in \mathrm{Vect}(I_2, J)) \quad \text{par 7b} \\ &= \mathbb{P}(A \in S_2(\mathbb{R})) + \mathbb{P}(A \in \mathrm{Vect}(I_2, J)) - \mathbb{P}(A \in S_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_2, J)) \quad \text{par formule du crible}\end{aligned}$$

On a déjà $\mathbb{P}(A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{3}$.
On a alors

$$\mathbb{P}(A \in \mathrm{Vect}(I_2, J)) = \mathbb{P}(X_1 = X_4 \cap X_2 = -X_3) = \frac{1}{9},$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \in \mathrm{Vect}(I_2, J) \cap \mathcal{S}_2(\mathbb{R})) &= \mathbb{P}(A \in \mathrm{Vect}(I_2)) \quad \text{par 7c} \\ &= \mathbb{P}(X_1 = X_4 \cap X_2 = 0 \cap X_3 = 0) \\ &= \frac{1}{27}\end{aligned}$$

On retrouve alors la probabilité cherchée.

(b) On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0) &= \frac{\mathbb{P}(A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}) \cap det(A) = 0)}{\mathbb{P}(\det(A) = 0)} \\ &= \frac{27\mathbb{P}(A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}) \cap det(A) = 0)}{11} \quad \text{par 8c}\end{aligned}$$

Par la question 7a, on a

$$\begin{aligned}
[A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}) \cap \det(A) = 0] &= [[X_2 = X_3] \cap [X_1 X_4 = X_2^2]] \cup [[X_2 = -X_3] \cap [X_1 = X_4] \cap [X_1^2 + X_2^2 = 0] \\
&= [X_2 = 0 \cap X_3 = 0 \cap X_1 X_4 = 0] \cup [X_2 = 1 \cap X_3 = 1 \cap X_1 X_4 = 1] \\
&\quad \cup [X_2 = -1 \cap X_3 = -1 \cap X_1 X_4 = 1] \cup [X_1 = 0 \cap X_2 = 0 \cap X_3 = 0 \cap X_4 = 0] \\
&= (X_1, X_2, X_3, X_4) \in \{(0,0,0,0), (1,0,0,0), (-1,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,0,-1), \\
&\quad (1,1,1,1), (-1,1,1,-1), (1,-1,-1,1), (-1,-1,-1,-1)\}
\end{aligned}$$

Par incompatibilité et indépendance, on a donc

$$\mathbb{P}(A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}) \cap \det(A) = 0) = \frac{9}{81}$$

et finalement

$$\mathbb{P}(A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0) = \frac{3}{11}.$$