SESSION 2024

CONCOURS G2E

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont interdites. Les téléphones portables et autres «smartphones» doivent être éteints au cours de l'épreuve et ne doivent en aucun cas être utilisés même à titre de montre.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.
La rédaction se fera uniquement à l'encre bleue ou noire et l'utilisation du blanc correcteur est interdite. Les découpages et collages sur la copie sont interdits.
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.

PROBLÈME 1

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on rappelle que si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ alors leur produit scalaire canonique noté $(x|y)$ est défini par :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On confondra les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ainsi que les réels et les matrices carrées de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$.

Si A est une matrice, sa transposée est notée $A^\top$. Si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, son supplémentaire orthogonal est noté $E^\perp$.

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$, autrement dit :

$$S_n^+(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A^\top = A \text{ et } \mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+\right\}.$$

L'objectif de ce problème est de démontrer l'appartenance à $S_n^+(\mathbb{R})$ de certaines matrices.

La partie A est consacrée à l'étude d'exemples en petites dimensions. Dans la partie B, on fait le lien avec la notion de produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, et dans la partie C, on fait le lien avec la notion de covariance. Ces deux dernières parties ne sont pas indépendantes.

Partie A : Quelques exemples

1. Préciser, en justifiant, parmi les matrices ci-dessous lesquelles appartiennent à $S_2^+(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

2. On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices $M(a,b)$ qui s'écrivent comme ci-dessous :

$$\mathcal{M} = \left\{M(a,b), \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \text{ où } M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel engendré par une famille judicieusement choisie. Justifier que cette famille est libre et en déduire la dimension de $\mathcal{M}$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer deux vecteurs propres de $M(a,b)$ sous la forme $(1,y,1)$ (avec $y \in \mathbb{R}$) puis un troisième vecteur propre orthogonal aux deux précédents.

   (c) En déduire un réel $r \geqslant 0$ et une matrice P inversible telle que $P^\top = P^{-1}$ et :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad M(a,b) = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+br & 0 \\ 0 & 0 & a-br \end{pmatrix} P^\top.$$

   (d) Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple portant sur a et b pour que $M(a,b)$ appartienne à $S_3^+(\mathbb{R})$.

Partie B : Matrice de Gram

Soit une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et on appelle matrice de Gram de cette famille la matrice G définie par :

$$G = \begin{pmatrix} (e_1|e_1) & (e_1|e_2) & \dots & (e_1|e_n) \\ (e_2|e_1) & (e_2|e_2) & \dots & (e_2|e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e_n|e_1) & (e_n|e_2) & \dots & (e_n|e_n) \end{pmatrix}.$$

3. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x \in E^\perp \Leftrightarrow \big(\forall i \in [\![1,n]\!], \quad (x|e_i) = 0\big).$$

   (b) En déduire que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Ker}(G) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E^\perp.$$

   (c) En déduire enfin que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre si et seulement si G est une matrice inversible.

4. Dans cette question, on cherche à prouver que $G \in S_n^+(\mathbb{R})$ et on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   (a) Calculer le produit matriciel GX et démontrer que $X^\top GX = (x'|x')$ où x' est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ à préciser.
   (b) Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(G)$ et X un vecteur propre de G associé à cette valeur propre. En calculant de deux façons $X^\top GX$, démontrer que $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et conclure.

Partie C : Matrice de covariance

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ n variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ telles que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, la covariance de X_i et X_j, notée $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$, existe. On rappelle que cette covariance vérifie :

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{E}(X_i X_j) - \mathrm{E}(X_i)\,\mathrm{E}(X_j).$$

On appelle matrice de covariance de $(X_1, \ldots, X_n)$ la matrice Σ définie par :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(X_1, X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \ldots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Cov}(X_2, X_2) & \ldots & \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \mathrm{Cov}(X_n, X_2) & \ldots & \mathrm{Cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}.$$

5. (a) Démontrer que :

$$\forall (i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3, \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{Cov}(X_i, X_j + xX_k) = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) + x\,\mathrm{Cov}(X_i, X_k).$$

   (b) En déduire que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{Cov}(X_i, \sum_{j=1}^{n} x_j X_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j\,\mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

6. (a) Justifier que Σ est une matrice symétrique réelle.
   (b) En s'inspirant de la question 4 de la partie précédente, démontrer que $\Sigma \in S_n^+(\mathbb{R})$.