G2E

2024

PROBLÈME 1

Partie A : Quelques exemples

1. La matrice A n'est pas symétrique, donc n'est pas dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

La matrice B est symétrique, et ses valeurs propres sont les racines de $X^2 - 1$, donc 1 et -1 . Ainsi, B n'est pas dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

La matrice C est symétrique, et ses valeurs propres sont les racines de $X^2 - 2X$, donc 0 et 2. Ainsi, C est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

La matrice D est symétrique, et ses valeurs propres sont les racines de $X^2 - 6X + 5$, donc 1 et 5. Ainsi, D est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2. (a) On pose

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on a $\mathcal{M} = \text{Vect}(I_3, U)$, qui est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Les matrices I_3 et U ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre, et donc une base de $\mathcal{M}$.

On a donc $\dim \mathcal{M} = 2$.

- (b) On a pour $a, b, y \in \mathbb{R}$:

$$M(a, b) \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + by \\ 2b + ay \\ a + by \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $M(a, b)$ si et seulement si $2b + ay = y(a + by)$, associé à la valeur propre $a + by$.

Les valeurs $y = \sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{2}$ conviennent.

Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ orthogonal à ces deux vecteurs doit vérifier

$$\begin{cases} x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0 \end{cases}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient alors.

Ce vecteur est bien un vecteur propre de $M(a, b)$, associé à la valeur propre a , et orthogonal aux deux premiers.

(c) Soient alors les vecteurs

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille (u, v, w) est alors une base orthonormée de vecteurs propres, et en posant $b = \sqrt{2}$ et P la matrice dont les colonnes sont u, v, w , on a bien le résultat demandé.

(d) La matrice $M(a, b)$ est toujours symétrique. Ainsi, elle appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $a \geq 0$, $a + br \geq 0$ et $a - br \geq 0$, ce qui est équivalent à $a \geq |b|r$.

Partie B : Matrice de Gram

3. (a) Le sens direct est évident : les e_i sont dans E , donc si x est orthogonal à tous les vecteurs de E , alors il est orthogonal aux e_i .

Supposons alors que x est orthogonal à tous les e_i . Soit alors $y \in E$; la famille $(e_1, \dots, e_n)$ étant génératrice de E , on peut trouver des scalaires α_i tels que $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$.

On a alors

$$\begin{aligned} (x|y) &= \left(x \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right. \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (x|e_k) \alpha_k \quad \text{par linéarité à droite} \\ &= 0 \quad \text{par hypothèse} \end{aligned}$$

Ainsi, $x \in E^\perp$.

(b) Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a alors

$$\begin{aligned} X \in \ker(G) &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{k=1}^n (e_i|e_k) x_k = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left(e_i \left| \sum_{k=1}^n x_k e_k \right. \right) = 0 \quad \text{par linéarité à droite} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E^\perp \end{aligned}$$

(c) Supposons la famille $(e_1, \dots, e_n)$ libre. Soit alors $(x_1, \dots, x_n) \in \ker(G)$. On a alors par la question précédente $\sum_{k=1}^n x_k e_k \in E^\perp$, mais par stabilité, $\sum_{k=1}^n x_k e_k \in E$.

Ainsi, on a $\sum_{k=1}^n x_k e_k = 0$, puis $(x_1, \dots, x_n) = 0$ par liberté.

Le noyau de G est donc réduit à $\{0\}$, et donc la matrice G est inversible.

Réciproquement, supposons G inversible. Soit alors $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n x_k e_k = 0$.

Alors $\sum_{k=1}^n x_k e_k = 0 \in E^\perp$, et donc $(x_1, \dots, x_n) \in \ker(G) = \{0\}$.

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est donc libre.

4. (a) On a alors

$$GX = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n (e_1 | e_k) x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n (e_n | e_k) x_k \end{pmatrix},$$

puis

$$X^\top GX = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (e_i | e_k) x_i x_k = (x' | x')$$

où $x' = \sum_{k=1}^n x_k e_k$.

(b) On a d'une part

$$X^\top G X = X^\top \lambda X = \lambda (X | X).$$

D'autre part, on a $X^\top GX = (x' | x')$ d'après la question précédente.

En notant que $(X | X) > 0$ et $(x' | x') \geq 0$ car le produit scalaire est défini positif, on a donc $\lambda = \frac{(x' | x')}{(X | X)} \geq 0$.

Comme G est symétrique par symétrie du produit scalaire, on a bien $G \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Partie C : Matrice de covariance

5. (a) Soient donc $i, j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, X_j + xX_k) &= \mathbb{E}(X_i(X_j + xX_k)) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j + xX_k) \\ &= \mathbb{E}(X_i X_j + xX_i X_k) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j + xX_k) \\ &= \mathbb{E}(X_i X_j) + x\mathbb{E}(X_i X_k) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) - x\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_k) \\ &= \text{Cov}(X_i, X_j) + x \text{Cov}(X_i, X_k) \end{aligned}$$

(b) Soient $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Procédons par récurrence sur n :

- pour $n = 1$, le résultat est donné par la question précédente.
- soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose le résultat vrai pour ce n . Soient $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left(X_i, \sum_{j=1}^{n+1} x_j X_j \right) &= \text{Cov} \left(X_i, \sum_{j=1}^n x_j X_j + x_{n+1} X_{n+1} \right) \\ &= \text{Cov} \left(X_i, \sum_{j=1}^n x_j X_j \right) + x_{n+1} \text{Cov}(X_i, X_{n+1}) \quad \text{par la question précédente} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} x_j \text{Cov}(X_i, X_j) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

Par récurrence, on a bien le résultat voulu.

6. (a) Le produit de réels étant commutatif, il est clair que la covariance est symétrique, et donc la matrice Σ est bien symétrique réelle.

(b) Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de Σ , associé à la valeur propre λ .

On a alors comme en 4, en utilisant la question précédente : $Y^\top \Sigma Y = \text{Cov}(y', y') = \mathbb{V}(y')$, où $y' = \sum_{i=1}^n y_i X_i$.

D'autre part, on a $Y^\top \Sigma Y = \lambda(Y|Y)$, qui est strictement positif comme en 4b.

Ainsi, on a donc $\lambda = \frac{\text{Cov}(y', y')}{(Y|Y)}$, qui est positif par positivité de la variance.

Comme Σ est symétrique, on a bien $\Sigma \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.