# Modélisation Mathématique et Informatique

2024

**Q.1.** On reconnait une suite géométrique ; on a donc pour tout $n$, $v_n = v_0 q^n$.

Il y a donc extinction si et seulement si $q < 1$.

**Q.2.1.** On pose donc $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \frac{1}{2}x\left(\frac{S-x}{S}\right) = -\frac{1}{2S}x\,(x-3S) \end{array}$.

La fonction est donc croissante sur $\left[0, \frac{3}{2}S\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{3}{2}S, +\infty\right[$.

**Q.2.2.** On propose le code

```python
S = 30
v0 = 5
L=[v0]
v=v0
for k in range(19):
    v = v+.5*v*((S-v)/S)
    L.append(v)

plt.plot(L)
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("v_n")
plt.show()

```

**Q.2.3.** On importe le module avec `import matplotlib.pyplot as plt`.

**Q.2.4.** On conjecture que quelque soit la valeur de $v_0$, la suite $(v_n)$ converge vers $S$.

**Q.2.5.** Commençons par noter que $f(S) = S$, et donc que $f$ est croissante de $]0, S]$ dans $]0, S]$.

On montre par récurrence que pour tout entier $n$, $v_n \in ]0, S]$.

- On a bien $v_0 \in ]0, S]$ par hypothèse.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ ; on suppose que $v_n \in ]0, S]$. D'après la remarque précédente, on a donc bien $f(v_n) = v_{n+1} \in ]0, S]$.

Ainsi, on a pour tout $n$ : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2S}v_n(S - v_n) \geqslant 0$, donc la suite est croissante.

Elle est de plus majorée par $S$, et elle converge donc vers un point fixe de $f$ sur $]0, S]$ : on vérifie facilement que $S$ est le seul.

Finalement, la suite $(v_n)$ converge vers $S$.

**Q.3.1.** On a donc $f\colon x \mapsto x + \frac{1}{2S^2}x(S-x)(x-A)$. Ainsi, pour $x \in [0, S]$, $f(x) - x$ est du signe de $x - A$ ; $f(x) - x$ est donc négatif sur $[0, A]$ et positif sur $[A, S]$.

**Q.3.2.** On note que $f(A) = A$, et de même qu'en **Q.2.5**, on montre facilement que pour tout entier $n$, $v_n \in ]0, A[$.

Par la question **Q.3.1**, la suite est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge donc vers un réel $\ell \leqslant v_0 < A)$ qui est un point fixe de $f$.

Les points fixes de $f$ sont clairement 0, $A$ et $S$, et ainsi la suite $(v_n)$ converge vers 0.

**Q.3.3.** De même, la suite reste dans l'intervalle $]A, S[$, mais est ici croissante. Elle converge donc vers $S$.

Si $v_0 = A$, alors la suite est constante égale à $A$, et donc converge vers $A$.

**Q.3.4.** $A$ est donc le point d'équilibre de la population. Au-dessus de $A$, la population tend vers un nombre limite $S$, et sinon elle s'éteint.

**Q.4.1.** Les points 0, $A$ et $S$ sont clairement des points d'équilibre. Comme $F$ est un polynôme de degré 3, il ne peut pas y en avoir d'autres.

**Q.4.2.** On a pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$F'(t) = \frac{1}{2S^2}(S-t)(t-A) - \frac{t}{2S^2}(t-A) + \frac{t}{2S^2}(S-t).$$

Ainsi :

- $F'(0) = \frac{-SA}{2S^2} < 0$, donc 0 est un point d'équilibre stable
- $F'(A) = \frac{A(S-A)}{2S^2} > 0$, donc $A$ est un point d'équilibre instable
- $F'(S) = -\frac{S(S-A)}{2S^2} < 0$, donc $S$ est un point d'équilibre stable.

**Q.4.3.** On a une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, et donc

$$\forall t,\ y(t) = (y(0) - x_0)e^{F'(x_0)t} + x_0.$$

**Q.4.4.** Pour un point d'équilibre stable, on aura donc $y(t) \to x_0$ quand $t \to +\infty$.
Pour un point instable, la fonction $y$ divergera vers $\pm\infty$.
Comme dans la question **Q.3**, les solutions s'éloignent du point d'équilibre $A$ si on part d'une valeur proche de $A$, alors qu'elles restent proches de 0 et $S$.

**Q.5.** Dans ce cas, la suite $(Z_n)$ est une suite de variables aléatoires certaines, géométrique. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $Z_n = q^n$.

**Q.6.** Montrons-le par récurrence :

- On a bien $Z_0 = 1$, donc $\mathbb{P}(Z_0 = 1) = p^0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ ; on suppose que $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p^n)$.
  La population au rang $n$ est donc de 0 ou 1, et il en sera donc de même au rang suivant.
  Par formule des probabilités totales, on a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}_{[Z_n=1]}(Z_{n+1} = 1)\mathbb{P}(Z_n = 1) + \mathbb{P}_{[Z_n=0]}(Z_{n+1} = 1)\mathbb{P}(Z_n = 0)\\ &= pp^n + 0\\ &= p^{n+1}\end{aligned}$$

On a donc bien le résultat voulu.

Comme $p \in ]0,1[$, on a alors $\lim \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1$.

**Q.7.** On a clairement $[Z_n = 0] \subseteq [Z_{n+1} = 0]$, donc par croissance de $\mathbb{P}$, la suite est bien croissante.

Comme elle est majorée par 1, elle converge.

**Q.8.1.** On a donc $Z_1(\Omega) = \{0, 2\}$, et

$$\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 1 - p \text{ et } \mathbb{P}(Z_1 = 2) = p.$$

Son espérance vaut donc $2p$, et sa variance $4p(1-p)$.

**Q.8.2.** En supposant $Z_1 = 2$, pour avoir $Z_{n+1} = 0$, il faut et il suffit que les deux lignées s'éteignent en $n$ étapes ; comme elles sont indépendantes, on a bien

$$\mathbb{P}_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0) = u_n^2.$$

Par formule des probabilités totales appliquée au système $[Z_1 = 0],\ [Z_1 = 2]$, on a bien le résultat voulu.

**Q.8.3.** On sait que $(u_n)$ converge (**Q 7**), soit donc $\ell$ sa limite.
En passant à la limite dans la question **Q 8.3**, on a donc

$$\ell = (1-p) + p\ell^2.$$

Les valeurs 1 et $\frac{1-p}{p}$ sont solutions de cette équation du second degré, ce sont donc les seules.

**Q.8.4.** Si $p \leqslant \frac{1}{2}$, on a alors $\frac{1-p}{p} \geqslant 1$. Comme $\ell \leqslant 1$, on a nécessairement $\ell = 1$.

**Q.8.5.** Si $p > \frac{1}{2}$, alors il est clair que $\frac{1-p}{p} < 1$.

Montrons la première inégalité par récurrence.

- On a $u_0 = 0 \leqslant \frac{1-p}{p}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ ; on suppose $u_n \leqslant \frac{1-p}{p}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1 - p + pu_n^2 \\ &\leqslant 1 - p + \frac{(1-p)^2}{p} \\ &\leqslant \frac{p - p^2 + 1 - 2p + p^2}{p} \\ &\leqslant \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

On a donc bien l'inégalité voulue.

On a ensuite, par passage à la limite, $\ell \leqslant \frac{1-p}{p} < 1$, donc nécessairement, $\ell = \frac{1-p}{p}$.

**Q.8.6.** TODO

**Q.9.1.** L'ensemble $\{[Z_1 = k] \mid k \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements, donc par formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_{n+1} = 0)\mathbb{P}(Z_1 = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_n^k p^k (1-p) \\ &= \frac{1-p}{1-pu_n} \end{aligned}$$

car $pu_n \in ]0, 1[$.

**Q.9.2.** En résolvant l'équation, on trouve

$$\ell = \min\left(1, \frac{1-p}{p}\right).$$

**Q.9.3.** On note que $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)$. On a alors par linéarité $\mathbb{E}(Y) = \frac{p}{1-p}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim u_n = 1 &\Leftrightarrow \frac{1-p}{p} \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}(Y) \leqslant 1 \end{aligned}$$

Ainsi, si chaque individu fait en moyenne moins d'un descendant, la population s'éteindra presque sûrement.

**Q.10.1.** Le premier argument est le paramètre de la loi de Poisson, et le second le nombre de génération qu'on souhaite simuler.

**Q.10.2.** Les lignes 11 et 12 servent, si une génération n'a aucun descendant, à arrêter la fonction et renvoyer le résultat.

La ligne 2 sert à initialiser un tableau avec $n + 1$ zéros, qu'on remplit par la suite avec les différentes populations aux différentes générations.

Les lignes 6,7 et 8 servent, pour une génération donnée, à calculer son nombre total de descendants.

**Q.10.3.** Une somme de lois de Poisson indépendantes est une loi de Poisson, dont le paramètre est la somme des paramètres.
Ainsi, le nombre total de de descendant de la $n$-ième génération suit une loi de Poisson de paramètre $Z_n\lambda$.

**Q.11.1.** On propose

```python
lambda_ = 0.7
for k in range(10):
    plt.plot(galton_watson(lambda_,20))
plt.show()
```

**Q.11.2.** Pour $\lambda < 1$, la probabilité d'extinction semble être 1. Pour $\lambda > 1$, elle semble être non nulle.

**Q.12.1.** On peut changer la dernière ligne par

```python
return int(population[-1]==0)
```

**Q.12.2.** On propose

```python
def extinction(lambda_):
    N=5000
    e=0
    for i in range(N):
        e = e + galton_watson_2(lambda_,60)/N
    return e
```

**Q.13.1.** La probabilité $p_\lambda$ est décroissante avec $\lambda$, et vaut 1 jusqu'à environ $0,9$.

**Q.13.2.** Soit $B_k$ la variable aléatoire qui vaut 1 si la $k$-ième simulation mène à une extinction, 0 sinon.
Alors les $B_k$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p_\lambda$, et sont mutuellement indépendantes.
Ainsi, $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_\lambda)$. On a alors $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = p_\lambda$ et $\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}p_\lambda(1-p_\lambda)$.
$\frac{S_n}{n}$ admet donc une variance, donc par inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, on a pour tout $\varepsilon > 0$ :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p_\lambda(1-p_\lambda)}{n\varepsilon^2}.$$

En notant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, on a bien le second résultat.

**Q.13.3.** On a donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Or

$$\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{S_n}{n} - p_\lambda < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{S_n}{n} - \varepsilon < p_\lambda < \frac{S_n}{n} + \varepsilon.$$

Il suffit donc de trouver $\varepsilon$ pour avoir $1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} = 0.95$, donc $\varepsilon = \sqrt{\frac{5}{n}}$.

**Q.13.4.** Pour $n = 5000$, on a donc $\varepsilon \approx 0.03$. Alors

- Pour $\lambda =\ 1,05$, on lit $\frac{S_n}{n} \approx 0,9$, et on obtient donc l'intervalle $[0,87, 0.93]$.
- Pour $\lambda =\ 1,1$, on lit $\frac{S_n}{n} \approx 0,82$, et on obtient donc l'intervalle $[0,79, 0.85]$.
- Pour $\lambda =\ 1,05$, on lit $\frac{S_n}{n} \approx 0,75$, et on obtient donc l'intervalle $[0,72, 0.78]$.