

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET INFORMATIQUE

2019

Partie 1

- (a) En minimisant F par rapport à a, b, c , on cherche à trouver les coefficients du trinôme du second degré qui permettra de minimiser la somme des carrés des écarts verticaux entre le nuage de points $\{(t_i, y_i) \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ et la parabole. On cherche donc le trinôme du second degré qui sera globalement le plus proche de la courbe réelle.
- (b) En fixant deux des trois paramètres, la fonction F est une fonction polynomiale, et donc de classe \mathcal{C}^1 ; la fonction F admet donc des dérivées partielles par rapport aux trois variables a, b, c .
On a alors pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial a}(a, b, c) &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bt_i - ct_i^2) \\ \frac{\partial F}{\partial b}(a, b, c) &= -2 \sum_{i=1}^n t_i (y_i - a - bt_i - ct_i^2) \\ \frac{\partial F}{\partial c}(a, b, c) &= -2 \sum_{i=1}^n t_i^2 (y_i - a - bt_i - ct_i^2)\end{aligned}$$

- (a) Il suffit de calculer $T\beta$:

$$T\beta = \begin{pmatrix} a + t_1 b + t_1^2 c \\ \vdots \\ a + t_n b + t_n^2 c \end{pmatrix},$$

et donc on a bien

$$Y - T\beta = \begin{pmatrix} y_1 - a - bt_1 - ct_1^2 \\ \vdots \\ y_n - a - bt_n - ct_n^2 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\left\langle T - T\beta; \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n y_i - a - bt_i - ct_i^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial a}(a, b, c),$$

d'après la question 1.1.b.

- (b) De même, on a donc

$$\left\langle T - T\beta; \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n t_i (y_i - a - bt_i - ct_i^2) = -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial b}(a, b, c),$$

d'après la question 1.1.b.

- Si $\hat{\beta}$ est solution du système donné, *i.e.* si $\hat{\beta}$ est point critique de F , alors on a par la question 1.2, en

utilisant la représentation matricielle du produit scalaire :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (Y - T\hat{\beta}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} (Y - T\hat{\beta}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} t_1^2 \\ \vdots \\ t_n^2 \end{pmatrix} (Y - T\hat{\beta}) = 0$$

Les trois vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} t_1^2 \\ \vdots \\ t_n^2 \end{pmatrix}$ correspondent aux colonnes de T , et on a donc

$${}^tT(Y - T\hat{\beta}) = 0,$$

et on retrouve donc ${}^tTT\hat{\beta} = {}^tTY$.

4. (a) Soit donc $u \in \ker(A)$. On a alors $Au = 0$, et donc ${}^tAAu = 0$.
Réciproquement, soit $u \in \ker({}^tAA)$. On a alors ${}^tAAu = 0$, et donc ${}^tu{}^tAAu = 0$, puis $\|Au\|^2 = 0$.
On a donc bien $u = 0$ par propriété de la norme.
In fine, on a bien $\ker(A) = \ker({}^tAA)$.

- (b) La matrice tAA est dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, et donc par le théorème du rang, on a

$$\dim \ker({}^tAA) + \text{rg}({}^tAA) = p.$$

- (c) De la même façon, on a par le théorème du rang

$$\dim \ker(A) + \text{rg}(A) = p.$$

- (d) Ainsi, comme $\dim \ker({}^tAA) = \dim \ker(A)$ par 1.4.a, on a donc $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tAA)$.
Ainsi, si A est de rang p , alors tAA est inversible, et la réciproque est vraie.

5. Si la matrice tTT est inversible, on a alors directement par 1.3

$$\hat{\beta} = ({}^tTT)^{-1} {}^tTY.$$

Partie 2

- (a) Faux : les n premières colonnes de `mat` sont remplies avec les coefficients de A , qui ne sont pas nuls puisque A est supposée inversible.

(b) Faux : la matrice a n lignes et $2n$ colonnes, alors que A est carrée à n lignes.

(c) Faux : il n'y a pas d'erreur, les lignes et colonnes de A étant bien numérotées de 0 à $n - 1$.

(d) Vrai : la matrice contient initialement des 0, et ses n premières colonnes sont remplies avec les coefficients de A à l'aide des boucles `for`.
- (a) La fonction `multtip` prend en paramètre une matrice M , un indice de ligne i et un réel c , et renvoie la matrice M où la i -ième ligne a été multipliée par c .

(b) On propose :

```

1 def ajout(M,i,j,c):
2     p = np.shape(M)[1]
3     for k in range(0,p):
4         M[i,k] += c*M[j,k]
5

```

(c) On propose :

```

1 def permut(M,i,j):
2     p = np.shape(M)[1]
3     for k in range(p):
4         M[i,k],M[j,k] = M[j,k],M[i,k]
5

```

3. On propose, en supposant que $j < n$:

```

1 def rang_pivot(M,j):
2     r = 0
3     m = abs(M[0,j])
4     n = np.shape(M)[0]
5     for i in range(n):
6         if abs(M[i,j]) > m:
7             m = abs(M[i,j])
8             r = i
9     return r
10

```

Dans le cas où plusieurs valeurs de r conviennent, l'inégalité stricte ligne 6 ne met pas à jour si on rencontre la même valeur : l'algorithme renvoie donc le plus petit r qui convient.

4. (a) La fonction `print` est appelée autant de fois que le nombre de lignes de la matrice passée en paramètre.

Dans le cas de M_1 , elle est donc exécutée trois fois.

Elle affichera, dans l'ordre

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

(b) Cet algorithme permet d'échelonner la matrice par la méthode de Gauss :

- on cherche le plus grand pivot, qu'on place en première ligne
- on annule les coefficients des autres lignes dans la première colonne grâce au pivot
- on itère en "oubliant" la première ligne et la première colonne de la matrice.

5. (a) On propose

```

1 def reduire(M):
2     n = np.shape(M)[0]
3     mystere(M)
4     for i in range(0,n):
5         multip(M,i,1/M[i,i])
6     for j in range(n-1,0,-1):
7         for k in range(j-1,-1,-1):
8             ajout(M,k,j,-M[k,j])
9

```

(b) Cette fonction commence par modifier les lignes pour avoir des coefficients diagonaux égaux à 1, puis continue d'appliquer le pivot de Gauss en partant de la dernière ligne pour supprimer "en remontant" les coefficients non diagonaux.

6. (a) On réutilise la fonction `initialisation` :

```

1 def augmenter(A):
2     n = np.shape(A)[0]
3     mat = initialisation(A)
4     mat[:,n:] = np.eye(n)
5     return mat
6

```

(b) On peut alors inverser la matrice A en créant la matrice contenant A d'un côté, la matrice identité de l'autre, et en réduisant cette matrice pour avoir l'identité à gauche. Il suffit alors de récupérer la matrice dans la partie droite.

```

1 def inverser(A):
2     mat = augmenter(A)
3     reduire(mat)
4     return mat[:,n:]
5

```

(c) On vient alors d'implémenter la méthode du pivot de Gauss, ou méthode miroir, pour inverser une matrice.

Partie 3

1. On résout l'équation sur $[0, +\infty[$

$$y'(t) + ky(t) = 1.$$

Les solutions de l'équation homogène sont données par

$$y_h(x) = Ce^{-kt},$$

où C est une constante réelle.

L'équation est à coefficients constants, et une solution particulière est donnée par $y_p(t) = \frac{1}{k}$.

Finalement,

$$\exists C \in \mathbb{R}, x(t) = Ce^{-kt} + \frac{1}{k}.$$

La condition $x(0) = 0$ permet de trouver $C = -\frac{1}{k}$, et finalement l'unique solution au problème de Cauchy est donnée par

$$\forall t \geq 0, x(t) = \frac{1}{k} (1 - e^{-kt}).$$

2. (a) Soit donc $t \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :

- si $t < 0$, alors $h(t) = h(t - \Delta) = 0$, et on a bien $\delta(t) = h(t) - h(t - \Delta)$
- si $t \in [0, \Delta[$, alors $t - \Delta < 0$ et donc $h(t) = 1$ et $h(t - \Delta) = 0$, et on a bien $\delta(t) = h(t) - h(t - \Delta)$
- si $t \geq \Delta$, alors $t - \Delta \geq 0$, et donc $h(t) = h(t - \Delta) = 1$, et on a encore $\delta(t) = h(t) - h(t - \Delta)$

Finalement, on a bien le résultat voulu.

(b) Sur $[0, \Delta[$, on a la même équation différentielle qu'à la question précédente, et donc

$$\forall t \in [0, \Delta[, x(t) = \frac{1}{k} (1 - e^{-kt}).$$

On note qu'on a alors

$$\forall t \geq 0, x(t) = \begin{cases} \frac{1}{k} (1 - e^{-kt}) & \text{si } t \in [0, \Delta[\\ \frac{1}{k} (e^{-k(t-\Delta)} - e^{-kt}) & \text{si } t \geq \Delta \end{cases},$$

et que cette fonction est bien définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

3. On va résoudre l'équation sur \mathbb{R}_+ :

- si $t \in [0, t_{i-1}[$, alors l'équation est

$$x'(t) + kx(t) = 0 \text{ et } x(0) = 0.$$

On trouve alors facilement $x(t) = 0$ pour $t \in [0, t_{i-1}[$.

- si $t \in [t_{i-1}, t_i[$, alors l'équation est

$$x'(t) + kx(t) = 1 \text{ et } x(t_{i-1}) = 0,$$

cette deuxième condition assurant la continuité de x en t_{i-1} . On trouve alors

$$\forall t \in [t_{i-1}, t_i[, x(t) = \frac{u_i}{k} \left(1 - e^{-k(t-t_{i-1})}\right).$$

- si $t \geq t_i$, alors l'équation est

$$\forall t \geq t_i, x'(t) + kx(t) = 0 \text{ et } x(t_i) = \frac{u_i}{k} (1 - e^{k\Delta}),$$

pour assurer la continuité en t_i . On trouve alors bien la relation demandée

$$\forall t \geq t_i, x(t) = u_i \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k} e^{-k(t-t_i)}.$$

4. Montrons-le par récurrence sur i .

- Si $i = 1$, alors la question précédente nous donne directement

$$x(t_1) = u_1 \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k}.$$

- Supposons l'égalité vraie pour un certain $i \in \mathbb{N}^*$. Alors sur t_{i+1} , l'équation vérifiée par x est

$$x'(t) + kx(t) = u_{i+1} \text{ et } x(t_i) = \sum_{j=1}^i u_j \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k} e^{-k(t_i-t_j)}.$$

en résolvant l'équation, on trouve alors

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}[, x(t) = \sum_{j=1}^i \left(u_j \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k} e^{-k(t-t_j)} \right) + u_{i+1} \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k}.$$

La fonction x devant être continue en t_{i+1} , on trouve alors

$$x(t_{i+1}) = \sum_{j=1}^i \left(u_j \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k} e^{-k(t_i-t_j)} \right) + u_{i+1} \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k} = \sum_{j=1}^{i+1} \left(u_j \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k} e^{-k(t_i-t_j)} \right).$$

Par récurrence, on a donc bien le résultat demandé.

5. On fait une inversion d'indice en posant $\ell = i - j$. On a alors

$$\begin{aligned} x(t_i) &= \sum_{\ell=0}^{i-1} u_{i-\ell} \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k} e^{-k(t_i-t_{i-\ell})} \\ &= \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k} \sum_{\ell=0}^{i-1} u_{i-\ell} e^{-k\ell\Delta} \\ &= \nu \sum_{\ell=0}^{i-1} u_{i-\ell} \Phi^\ell \end{aligned}$$

où $\nu = \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k}$ et $\Phi = e^{-k\Delta}$.

6. La suite (Φ^ℓ) est une suite géométrique dont la raison est comprise strictement entre 0 et 1 ; elle est donc strictement décroissante, et converge vers 0.

L'équation indique donc qu'avec chaque changement dans δ , l'influence sur le niveau d'eau diminue géométriquement.

Partie 4

1. (a) Pour $p = 0$, on a pour tout n

$$\text{Cov}(Z_n, Z_n) = \mathbb{V}(Z_n) = \sigma^2.$$

Pour $p > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, les variables Z_n et Z_{n+p} sont indépendantes, et donc

$$\text{Cov}(Z_n, Z_{n+p}) = 0.$$

- (b) La suite (Z_n) est donc un processus stationnaire avec $\mu = m$ et γ_Z la fonction définie par

$$\forall p \in \mathbb{N}, \gamma_Z(p) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}.$$

2. (a) On a par linéarité

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(W_n) + \theta \mathbb{E}(W_{n-1}) = 0.$$

- (b) Pour $p = 0$, on a donc

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_n, X_n) &= \mathbb{V}(X_n) \\ &= \mathbb{V}(W_n) + \theta^2 \mathbb{V}(W_{n-1}) + 2\theta \text{Cov}(W_{n-1}, W_n) \quad \text{par linéarité} \\ &= (1 + \theta)\sigma^2 \end{aligned}$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_n, X_{n+p}) &= \text{Cov}(W_n, W_n + p) + \theta \text{Cov}(W_n, W_{n+p-1}) + \theta \text{Cov}(W_{n-1}, W_{n+p}) + \theta^2 \text{Cov}(W_{n-1}, W_{n+p-1}) \\ &= 2\theta \gamma_W(p-1) \\ &= \begin{cases} 2\theta \sigma^2 & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \end{aligned}$$

- (c) Finalement, ni l'espérance des X_n , ni les covariances $\text{Cov}(X_n, X_{n+p})$ ne dépendent de n , et donc (X_n) est bien un processus stationnaire.

3. (a) Notons μ l'espérance commune à tous les X_n .

On a donc par linéarité

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(W_n) + \phi \mathbb{E}(X_{n-1}) = \phi \mathbb{E}(X_{n-1}). =,$$

et donc $\mu = \phi \mu$. Comme on a $\phi \in]-1, 1[$, on a donc $\mu = 0$.

- (b) En multipliant (5) par X_n , on a donc

$$X_n^2 - \phi X_n X_{n-1} = W_n X_n.$$

En prenant l'espérance, on a donc par linéarité

$$\mathbb{E}(X_n^2) - \phi \mathbb{E}(X_n X_{n-1}) = \mathbb{E}(W_n X_n),$$

puis comme l'espérance des X_n est nulle,

$$\gamma_X(0) - \phi \gamma_X(1) = \mathbb{E}(W_n X_n).$$

- (c) i. D'après (5), on a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_n X_n) &= \mathbb{E}(W_n^2 + \phi W_n X_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}(W_n^2) + \phi \mathbb{E}(W_n X_{n-1}) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

ii. On a donc, par (5)

$$X_n X_{n-1} - \phi X_{n-1}^2 = W_n X_{n-1},$$

puis en prenant l'espérance, par la question précédente,

$$\mathbb{E}(X_n X_{n-1}) - \phi \mathbb{E}(X_{n-1}^2) = 0.$$

Les espérances des X_n étant nulles, on a donc

$$\gamma_X(1) - \gamma_X(0) = 0.$$

iii. Les deux équations prouvées en 4.3.b et 4.3.c.2 donnent donc un système linéaire, qui donne après résolution

$$\gamma_X(0) = \frac{\sigma^2}{1 + \phi^2} \text{ et } \gamma_X(1) = \frac{\sigma^2 \phi}{1 + \phi^2}.$$

(d) En divisant (5) par ϕ^k , on a donc

$$\frac{X_k}{\phi^k} - \frac{X_{k-1}}{\phi^{k-1}} = \frac{W_k}{\phi^k},$$

puis en sommant de $k = n - p$ à n , en utilisant une somme télescopique

$$X_n = \phi^{p+1} X_{n-p-1} + \sum_{k=n-p}^n \phi^{n-k} W_k.$$

En prenant $p = n - 1$, on a donc

$$X_n = \phi^n X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k W_{n-k}.$$

On reconnaît, sous l'hypothèse $X_0 = 0$, la forme de l'équation (3).

Les valeurs des W_k représentent alors les entrées d'eau dans le lac.

Partie 5

1. La relation peut se réécrire

$$X_n - X_{n-1} = W_n - (1 - \phi)X_{n-1}.$$

On peut interpréter cette relation comme la différence de niveau entre deux instants, qui vaut la différence entre le débit d'entrée (simulé par un bruit blanc), et le débit de sortie (proportionnel au niveau précédent).

2. (a) On a donc

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_U(0) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (U_j - \bar{U})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (U_j^2 - \frac{1}{n} 2U_j \bar{U} + \frac{1}{n} \bar{U}^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_j^2 - 2\bar{U}^2 + \bar{U}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_j^2 - \bar{U}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_j^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_j \right)^2 \end{aligned}$$

(b) Notons que pour tous i et j , $i < j$, on a, comme (U_n) est stationnaire

$$\mathbb{E}(U_i U_j) = \gamma_U(j - i) + m^2 \text{ et } \mathbb{E}(U_i^2) = \gamma_U(0) + m^2.$$

On peut alors calculer

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widehat{\gamma}_U(0)) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(U_j^2) - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(U_j^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(U_i U_j) \right) \text{ par linéarité} \\ &= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2} \left(n(\gamma_U(0) + m^2) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \gamma_U(j - i) + m^2 \right) \\ &= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2} \left(n(\gamma_U(0) + m^2) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \gamma_U(j) + m^2 \right) \\ &= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2} \left(n(\gamma_U(0) + m^2) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} \gamma_U(j) + m^2 \right) \\ &= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2} \left(n(\gamma_U(0) + m^2) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (n - j)(\gamma_U(j) + m^2) \right) \end{aligned}$$

(c) On note que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} (n - j)(\gamma_U(j) + m^2) &= \sum_{j=1}^{n-1} (n - j)\gamma_U(j) + \sum_{j=1}^{n-1} nm^2 - \sum_{j=1}^{n-1} jm^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (n - j)\gamma_U(j) + n(n - 1)m^2 - \frac{1}{2}n(n - 1)m^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (n - j)\gamma_U(j) + \frac{1}{2}n(n - 1)m^2 \end{aligned}$$

En reprenant le résultat de la question précédente, on a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widehat{\gamma}_U(0)) &= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2} \left(n(\gamma_U(0) + m^2) + 2 \left(\sum_{j=1}^{n-1} (n - j)\gamma_U(j) + \frac{1}{2}n(n - 1)m^2 \right) \right) \\ &= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2} \left(n\gamma_U(0) + nm^2 + n(n - 1)m^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^{n-1} (n - j)\gamma_U(j) \right) \right) \\ &= \gamma_U(0) - \frac{1}{n^2} \left(n\gamma_U(0) + 2 \left(\sum_{j=1}^{n-1} (n - j)\gamma_U(j) \right) \right) \end{aligned}$$

(d) Notons que $\gamma_U(0) = \mathbb{V}(U_i) \geq 0$.

On a alors, pour tout n ,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\widehat{\gamma}_U(0)) - \gamma_U(0)| &\leq \frac{1}{n} |\gamma_U(0)| - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n - j}{n} |\gamma_U(j)| \\ &\leq \frac{1}{n} \gamma_U(0) - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_U(j)| \text{ car } \frac{n - j}{n} \leq 1 \text{ et la série à termes positifs converge} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien la convergence voulue.

3. On a donc, d'après le modèle proposé

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = \mu - \phi X_{n-1} + Z_n.$$

On peut alors approcher μ et ϕ par la méthode des moindres carrés.

On peut alors simuler les Z_n comme dans la partie 4, avec une variance $\sigma^2 = \gamma_U(0)$ approchée par $\hat{\gamma}_U(0)$.