

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET INFORMATIQUE

2021

Calcul d'une espérance de vie

1. Les solutions de l'équation sont de la forme $t \mapsto Ke^{-\alpha t}$, avec $K \in \mathbb{R}$ fixé.

Pour avoir $z(0) = z_0$, il faut avoir $K = z_0$.

Finalement, l'unique solution du problème de Cauchy est $z: t \mapsto z_0 e^{-\alpha t}$.

2. (a) On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$F(t) = 1 - \frac{z(t)}{z_0}.$$

$F(t)$ correspond donc au taux de variation de la population au temps t .

- (b) On reconnaît que F est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre α .
Ainsi, l'espérance de vie de la cohorte vaut $\frac{1}{\alpha}$.

3. (a) La quantité $z(t) - z(t + \Delta_t)$ correspond au nombre de morts entre les temps t et $t + \Delta_t$.
(b) La quantité proposée représente le temps de vie moyen.
(c) On a

$$\int_0^\infty \frac{dz}{dt} dt = [z(t)]_0^\infty = -z_0.$$

Soit ensuite $A \in \mathbb{R}_+$. On a, les fonctions $t \mapsto t$ et z étant de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\begin{aligned} \int_0^A t \frac{dz}{dt} dt &= [tz(t)]_0^A - \int_0^A z(t) dt \quad \text{par intégration par parties} \\ &= Az(A) - \left[-\frac{z_0}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^A \\ &= Az(A) + \frac{z_0}{\alpha} e^{-\alpha A} - \frac{z_0}{\alpha} \\ &\xrightarrow{A \rightarrow \infty} -\frac{z_0}{\alpha} \quad \text{par croissance comparées} \end{aligned}$$

Finalement, le rapport vaut $\frac{1}{\alpha}$.

Le paramètre α est homogène à l'inverse d'un temps. Ainsi, $\frac{1}{\alpha}$ est homogène à un temps, et on a vu en 2b qu'il pouvait être vu comme l'espérance de vie de la cohorte.

En ne connaissant que le nombre de décès, on peut alors choisir $\Delta_t = 1$ an, et calculer $\mathcal{E}_{\Delta_t}$ pour approximer $\frac{1}{\alpha}$.

Modèle de Bernoulli

1. (a) Le taux de mortalité hors variole n'est pas constant dans le temps; il peut varier avec les saisons, les récoltes, les autres épidémies, etc..
(b) On a

$$\begin{aligned} -\frac{dx}{dt} &= -\frac{dR}{dt} - \frac{dS}{dt} \\ &= a(t)R(t) - bS(t) + (a(t) + b + c)S(t) \\ &= a(t)R(t) + (a(t) + c)S(t) \end{aligned}$$

qui correspond à la variation du nombre de morts (toutes causes confondues) à l'instant t .
 $cS(t)$ correspond au nombre de morts de la variole à l'instant t .
On a alors

$$-\frac{1}{x} \left(\frac{dx}{dt} + cS(t) \right) = -\frac{1}{x} (-a(t)R(t) - a(t)S(t)) \\ = a(t)$$

(c) On a $\frac{dz}{dt} = -a(t)z(t)$, a représentant le taux de mortalité au temps t . Par la question précédente, on retrouve bien l'équation (4).

2. (a) On a donc pour tout t

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\frac{dx}{dt}S(t) - x(t)\frac{dS}{dt}}{S(t)^2} \\ &= \frac{bS(t)^2 - a(t)R(t)S(t) + a(t)R(t)S(t) + bR(t)S(t) + cR(t)S(t)}{S(t)^2} \\ &= b + (b+c)\frac{R(t)}{S(t)} \\ &= b + (b+c)\frac{x(t) - S(t)}{S(t)} \\ &= -c + (b+c)q(t) \end{aligned}$$

(b) On a une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, et on trouve directement

$$\forall t \geq 0, q(t) = \left(1 - \frac{c}{b+c}\right) e^{-(b+c)t} + \frac{c}{b+c} = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}e^{\frac{t}{8}}.$$

3. (a) On trouve

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\frac{dz}{dt}x(t) - z(t)\frac{dx}{dt}}{\frac{z(t)}{x(t)}} \\ &= \frac{\frac{dz}{dt}x(t) - z(t)\frac{dx}{dt}}{z(t)x(t)} \\ &= \frac{\left(\frac{dx}{dt} + cS(t)\right)z(t) - z(t)\frac{dx}{dt}}{z(t)x(t)} \quad \text{par 2.2.c} \\ &= \frac{c}{q(t)} \end{aligned}$$

Par 2.2.b, on retrouve bien le résultat demandé.

(b) En intégrant l'égalité (7) entre 0 et t , on obtient

$$\begin{aligned} \ln(G(t)) - \ln(G(0)) &= \ln\left(\frac{z(t)}{x(t)}\right) - \ln\left(\frac{z(0)}{x(0)}\right) \\ \ln\left(\frac{8e^{\frac{t}{8}}}{1 + 7e^{\frac{t}{8}}}\right) &= \ln\left(\frac{z(t)}{x(t)}\right) \end{aligned}$$

On en déduit alors la relation demandée.

4. On a donc $y = \gamma z$, avec $\gamma = \frac{199}{200}$.

5. On peut appliquer la même méthode que dans la partie 1, en remplaçant z par y . On a alors

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{y_0} \sum_{i=0}^{\infty} i(y(i) - y(i+1)) = \frac{\gamma}{y_0} \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{8e^{\frac{i}{8}}}{1 + 7e^{\frac{i}{8}}} (x(i) - x(i+1)),$$

et le calcul de cette quantité donne donc une approximation de l'espérance de vie de cette cohorte fictive.

Estimation de la fonction a

On propose le code suivant :

```
1 #1a
2 def extraction_ch():
3     data = open("data.txt", "r")
4     l = [data.readline(),data.readline()]
5     data.close()
6     return l
7
8 #1b
9 def ch_vers_list(ch):
10    L = [] #on ajoutera dans L tous les nombres
11    n = len(ch)
12    sh = "" #sh sert a stocker dans une chaine les suites de caracteres
entre
13    # deux espaces (ou entre le debut et un espace, ou un espace et la fin)
14    for k in range(0, n):
15        if ch[k] != " ":
16            sh = sh + ch[k]
17        else:
18            L.append(float(sh)) #des qu'on rencontre un espace, on ajoute
le
19            # nombre correspondant a la liste
20            sh = ""
21    L.append(float(sh)) #on ajoute le dernier nombre
22    return L
23
24 #1c
25 def division(l1,l2):
26    n = len(l1)
27    if n != len(l2):
28        return False
29    else:
30        l3 = []
31        for k in range(n):
32            l3.append(l1[k]/l2[k])
33    return l3
34
35 #1d
36 l1,l2 = extraction_ch()
37 l1 = ch_vers_list(l1)
38 l2 = ch_vers_list(l2)
39 Lnorm = division(l1,l2)
40
41 #2ai
42 """
43 On cherche ici a trouver la droite de regression lineaire entre les valeurs
de t et les valeurs de lt
44 """
45
46 #2aai
47 """
48 En minimisant M, on cherche a interpoler les points avec une fonction
exponentielle, en minimisant les distances entre les points et la courbe
.
```

```

49
50 On choisit plutot une exponentielle au vu de la decroissance rapide en 0
51 """
52
53 #2b
54 """
55 Pour gamma, il suffit de regarder la limite de la fonction.
56 Pour lambda, on regarde l'ordonnee a l'origine a laquelle on retire gamma0.
57
58 On peut alors prendre :
59 """
60 gamma0 = 0.01
61 lambda0 = 0.27
62
63 #2c
64 """
65 Cette fonction calcule, en fonction de mu, la quantite M(lambda0,mu,gamma0)
66 .
67 """
68 from math import exp
69 def M_mu(mu):
70     lamb = lambda0
71     gam = gamma0
72     s = 0
73     for k in range(0,len(Lnorm)):
74         s = s + (Lnorm[k] - lamb*exp(-mu*k)-gam)**2
75     return s
76
77 #2d
78 """
79 On cherche la valeur de mu minimisant la quantite M ; on voit graphiquement
80 qu'on peut choisir mu = 0.75.
81 """
82
83 #3a
84 def argmin2(f,x,y):
85     if f(x) <= f(y):
86         return x
87     else:
88         return y
89
90 def argmin3(f,x,y,z):
91     argminxy = argmin2(f,x,y)
92     return argmin2(f,argminxy,z)
93
94 #3b
95 def minimum(f,A,B,eps):
96     g = A
97     d = B
98     while d-g > eps: #si l'intervalle est plus large que eps, on continue
99         #calcul de x^g et x^d :
100         xg = g + (d-g)/3
101         xd = d - (d-g)/3
102         #calcul de g et d :
103         # on applique l'algo donne
104         if f(xg) < f(xd):

```

```

103         d = xd
104     elif f(xg) > f(xd):
105         g = xg
106     else:
107         g,d = xg,xd
108     return argmin3(g,d,(g+d)/2)
109
110 #4a
111 def test_croissant(L):
112     for k in range(len(L)-1):
113         if L[k] > L[k+1]: #si deux elements ne sont pas dans le bon ordre
114             return False #la liste n'est pas trie
115     return True #sinon, c'est que la liste est trie
116
117 #4b
118 """
119 On pourrait creer une liste des valeurs prises par M_mu sur l'intervalle
120 considere, avec un pas de 0.01 par exemple, puis tester la croissance de
121 cette liste.
122 """
123 #4c
124 #Il suffit de lancer l'instruction
125 minimum(M_mu,0,2,0.01)
126
127 #4d
128 """
129 On trouve une valeur proche de celle trouvee graphiquement.
130 La valeur de M en mu0 etant tres proche de 0, le modele exponentiel est
131 donc tres bon ; l'hypothese de constance de a est donc tres erronee.

```

Modèle individu-centré

- On a donc $Z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $[X_0 = S], [X_0 = R], [X_0 = D]$, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = S) = \mathbb{P}_{[X_0=S]}(X_1 = S)\mathbb{P}(X_0 = S) + \mathbb{P}_{[X_0=R]}(X_1 = S)\mathbb{P}(X_0 = R) + \mathbb{P}_{[X_0=D]}(X_1 = S)\mathbb{P}(X_0 = D) = 1 - (a+b+c).$$

De la même façon, on trouve

$$\mathbb{P}(X_1 = R) = b \text{ et } \mathbb{P}(X_1 = D) = a + c.$$

$$\text{Finalement, } Z_1 = \begin{pmatrix} 1 - (a + b + c) \\ b \\ a + c \end{pmatrix}.$$

- En utilisant le même raisonnement que dans la question précédente, on obtient facilement que pour tout n , $Z_{n+1} = QZ_n$.
Ainsi, par une rapide récurrence, on a bien $Z_n = Q^n Z_0$ pour tout n .
 - La matrice Q est triangulaire, et donc ses valeurs propres sont $1 - (a + b + c)$, $1 - a$ et 1 .
On pose alors $\lambda_1 = 1 - (a + b + c)$ et $\lambda_2 = 1 - a$. Les trois paramètres a , b et c étant supposés strictement positifs (?), on a bien $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$.
De plus, on suppose (?) que la probabilité de rester sain est non nulle, et donc que $1 - (a + b + c) > 0$.

Une résolution de systèmes permet de trouver les vecteurs propres $\begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivement associés à λ_1 , λ_2 et 1.

- (c) La matrice Q admet trois valeurs propres distinctes, en dimension 3, et donc est diagonalisable.

En posant P la matrice $P = \begin{pmatrix} -b-c & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a bien la relation demandée.

Après calculs, on trouve que

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{-1}{b+c} & 0 & 0 \\ \frac{b-c}{b+c} & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (d) Une rapide récurrence montre que pour tout n ,

$$Q^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

et on retrouve le résultat demandé en utilisant la question 4.2.a.

- (e) On a $\lambda_1, \lambda_2 \in]0, 1[$ et donc les suites (λ_1^n) et (λ_2^n) tendent toutes les deux vers 0.

Ainsi,

$$\lim \mathbb{P}(X_n = S) = 0, \lim \mathbb{P}(X_n = R) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(X_n = D) = 1.$$

Au bout d'un temps très long, l'individu considéré finira par mourir, de la varicelle ou non.

3. (a) On note que pour tout n

$$A_n = ([X_n = S] \cup [X_n = R]) \cap [X_{n+1} = D] = ([X_n = S] \cap [X_{n+1} = D]) \cup ([X_n = R] \cap [X_{n+1} = D]).$$

On a donc, par incompatibilité

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}([X_n = S] \cap [X_{n+1} = D]) + \mathbb{P}([X_n = R] \cap [X_{n+1} = D]) \\ &= \mathbb{P}_{[X_n=S]}(X_{n+1} = D) \mathbb{P}(X_n = S) + \mathbb{P}_{[X_n=R]}(X_{n+1} = D) \mathbb{P}(X_n = R) \\ &= (a+c)\lambda_1^n + a \frac{-b\lambda_1^n + b\lambda_2^n}{b+c} \\ &= \frac{c(a+b+c)}{b+c} \lambda_1^n + \frac{ab}{b+c} \lambda_2^n \end{aligned}$$

- (b) On reconnaît une série géométrique dérivée dont la raison est dans $] -1, 1[$, donc elle converge, vers la valeur donnée.

- (c) On note que pour tout n , on a $[T = n] = A_n$. Ainsi, la série $n\mathbb{P}(A_n)$ étant convergente par la question précédente, la variable T admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(A_n) = \frac{b(1-a)}{(b+c)a}.$$

- (d) On trouve alors $\mathcal{E} = 27,125$, ce qui est proche du résultat réel.

L'hypothèse est donc ici cohérente.