Modélisation Mathématique et Informatique

2022

Le sujet se compose de 5 parties largement indépendantes et de 2 annexes. La partie 5 est consacrée à l'informatique. Les candidats pourront admettre le résultat d'une question pour répondre à une question postérieure à condition de le mentionner explicitement.

Dans le cadre de l'étude d'une espèce de lièvres, on souhaite modéliser la dynamique d'évolution temporelle de cette population. L'objectif du sujet est de comparer différentes modélisations ainsi que leur simulation.

1 Modélisation de la dynamique d'une population isolée

On note t le temps et $x(t)$ l'effectif des lièvres en fonction du temps. On suppose, pour commencer, que la population est isolée dans un environnement aux ressources abondantes. On propose de modéliser la dynamique de population de lièvres par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx \tag{1}$$

où r est une constante strictement positive représentant le taux de reproduction intrinsèque des lièvres.

1. (a) Résoudre l'équation différentielle (1) de condition initiale $x(0) = x_0 > 0$.
   (b) Dessiner à la main l'allure de la solution de (1).
   (c) Que peut-on dire de l'évolution de la population de lièvres avec ce modèle ? L'équation différentielle (1) est-elle une modélisation raisonnable ?

On suppose à présent que les ressources du milieu sont limitées et on modélise la dynamique de population de lièvres par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \tag{2}$$

où K est une constante strictement positive.

2. (a) Intuitivement, quelle allure a une solution $x(\cdot)$ de (2) tant que l'effectif de lièvres $x(t)$ reste petit ?
   (b) En considérant (2), établir le tableau de signes de $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ en fonction de x pour $x \geq 0$.
   (c) Soit $x(\cdot)$ une solution de (2) avec $x(0) = x_0 > 0$. Est-ce possible qu'il existe un $t > 0$ tel que $x(t) = 0$? *La réponse sera justifiée en s'appuyant sur le tableau de signes obtenu à la question précédente.*
   (d) Soit $x(\cdot)$ une solution de (2) avec $x(0) = x_0 > 0$. On admettra que pour tout $t \geq 0, x(t) > 0$. On pose $z(t) = \frac{1}{x(t)}$. Montrer que $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{K} - rz$.
   (e) Résoudre l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{K} - rz$. On exprimera la solution en fonction de t, r, K et $z_0 = z(0)$.
   (f) En déduire une expression de $x(t)$ en fonction de t, r, K et x_0.
   (g) Quelle est la limite de $x(t)$ quand t tend vers l'infini ?
   (h) Dessiner à la main l'allure des solutions obtenues pour une condition initiale petite $x_0 > 0$ d'une part et pour une condition initiale $x_0 > K$ d'autre part.
   (i) En s'appuyant sur les réponses aux questions précédentes, décrire les différences entre les modèles (1) et (2) et donner une interprétation biologique de la constante K.

2 Modèle proie-prédateur

Dans cette partie, on souhaite modéliser l'évolution conjointe de deux populations : la population de lièvres, qui constituent des proies et une population de lynx, qui sont des prédateurs des lièvres. On modélise l'évolution des effectifs $x(t)$ des proies et $y(t)$ des prédateurs par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx - pxy \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -my + qxy \end{cases} \tag{3}$$

où r, p, m et q sont des constantes positives représentant respectivement le taux de reproduction intrinsèque des proies, le taux de mortalité des proies due aux prédateurs rencontrés, le taux de mortalité intrinsèque des prédateurs et le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées.

3. (a) Que devient le système (3) s'il n'y a pas de lynx, c'est-à-dire $y(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$? Comment évolue alors la population de lièvres ?
   (b) Que devient le système (3) s'il n'y a pas de lièvres, c'est-à-dire si $x(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$? Comment évolue alors la population de lynx ?
4. On pose $s = rt, \bar{x}(s) = \frac{q}{r}x(t)$ et $\bar{y}(s) = \frac{p}{r}y(t)$. Montrer que le système d'équations différentielles (3) peut se réécrire
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}s} = \bar{x} - \bar{x}\bar{y} \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}s} = -a\bar{y} + \bar{x}\bar{y} \end{cases}, \tag{4}$$
   où a est une constante à déterminer.

Dans toute la suite, pour simplifier les notations, on omettra les barres et on notera donc x pour $\bar{x}$ et y pour $\bar{y}$. Ainsí le système (4) sera noté :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = x - xy \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -ay + xy \end{cases} \tag{5}$$

On appelle *point d'équilibre* d'un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = g_1(x, y) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = g_2(x, y) \end{cases}$$

un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que les membres de droite des équations différentielles s'annulent simultanément pour ces valeurs. Ainsi, un point d'équilibre de (5) est une solution de

$$\begin{cases} x - xy &= 0 \\ \\ -ay + xy &= 0 \end{cases}.$$

5. (a) Déterminer les points d'équilibre du système (5).
   (b) En terme de dynamique des populations, que représentent ces points d'équilibre ?
   (c) Donner une interprétation biologique des points d'équilibre obtenus.

Pour $c > 0$ fixé, on définit $f_c(u) = u - c\ln u$ pour $u > 0$.

6. (a) Montrer que pour tout $u > 0$, on a : $f_c(u) \geq c(1 - \ln c)$.

(b) Montrer que $f_c(u) = c(1 - \ln c)$ si et seulement si $u = c$.

(c) Soit $M \geq c(1 - \ln c)$. Montrer qu'il existe b et B avec $0 < b \leq B$, tels que $f_c(u) \leq M$ si et seulement si $b \leq u \leq B$.

On définit maintenant, pour $x > 0$ et $y > 0$,

$$V(x, y) = x - a \ln x + y - \ln y. \tag{6}$$

7. Dans toute cette question, on considère $(x(\cdot), y(\cdot))$ une solution de (5) avec des conditions initiales $x(0) = x_0 > 0$ et $y(0) = y_0 > 0$.

   (a) i. Montrer que, pour tout $s \geq 0$, on a : $f_a(x(s)) \leq V(x(s), y(s)) - 1$ et $f_1(y(s)) \leq V(x(s), y(s)) - a(1 - \ln a)$.

   ii. Montrer que $V(x(s), y(s))$ reste constante pour tout $s \geq 0$.

   iii. En déduire qu'il existe b_x, B_x, b_y et B_y avec $0 < b_x \leq B_x$ et $0 < b_y \leq B_y$ tels que, pour tout $s \geq 0$, on a : $b_x \leq x(s) \leq B_x$ et $b_y \leq y(s) \leq B_y$.

   (b) Montrer que $V(x, y) \geq 1 + a(1 - \ln a)$, pour tous x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ et que, de plus, l'équation $V(x, y) = 1 + a(1 - \ln a)$ admet une unique solution (x^*, y^*) que l'on explicitera.

   (c) En s'appuyant sur les questions précédentes, répondre en justifiant aux questions suivantes :

   i. Les populations de proies et de prédateurs peuvent-elles s'éteindre ? Et peuvent-elles devenir arbitrairement grandes ?

   ii. Les populations de proies et de prédateurs peuvent-elles s'arrêter d'évoluer ?

   iii. Quels comportements peut-on envisager pour les populations de proies et de prédateurs ?

3 Modèle proie-prédateur avec environnement limité

Dans cette partie, on souhaite associer les modèles (2) et (4) en supposant à la fois que l'évolution des lièvres est limitée par leur environnement et que cette population est en interaction avec une population de lynx :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = x\left(1 - \dfrac{x}{K}\right) - xy \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -ay + xy \end{cases} \tag{7}$$

où a et K sont des constantes strictement positives et **différentes.**

8. Que se passe-t-il lorsque K est très grand ? Et quand $y = 0$?

9. Déterminer les points d'équilibre du système (7). Donner une interprétation physique de chaque point d'équilibre trouvé.

Pour un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = g_1(x, y) \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = g_2(x, y) \end{cases},$$

on construit une matrice $J(x, y)$, appelée *matrice jacobienne*, définie par

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) \\[2ex] \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

10. (a) Calculer la matrice jacobienne associée au système (7).

(b) Évaluer la matrice jacobienne aux points d'équilibre de la question 9.

(c) On considère les matrices suivantes :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} -1 & -K \\ 0 & K-a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{K} & -a \\ 1-\dfrac{a}{K} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de chaque matrice en fonction de K et a. *On pourra éventuellement disjoindre des cas si c'est nécessaire.*

(d) On dispose à l'annexe 1 page 8 de l'allure des solutions d'un système de deux équations différentielles autour d'un point d'équilibre en fonction des valeurs propres de la matrice jacobienne correspondante. Pour chaque point d'équilibre du système (7), identifier la situation correspondante.

(e) Interpréter ces résultats en terme de dynamique des populations. En particulier, on donnera un critère pour que la population de prédateurs se maintienne.

4 Résolution numérique du système différentiel

Dans cette partie, on met en place une résolution numérique du système (4) appelée la méthode d'Euler. On se fixe un petit intervalle de temps $h > 0$. A partir d'une condition initiale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on construit une suite de points de $\mathbb{R}^2$, notée $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, définie par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h\,(x_k - x_k y_k) \\ y_{k+1} = y_k + h\,(-a y_k + x_k y_k) \end{cases}, \tag{8}$$

telle que (x_k, y_k) est une approximation d'une solution de (4) au temps $t_k = hk$.

On pose $v_k = V\,(x_k, y_k)$, où la fonction V est définie par (6).

11. Exprimer $v_{k+1} - v_k$ en fonction de h, a, K, x_k et y_k.

12. (a) Montrer que $v_{k+1} - v_k \geq 0$.
    (b) Montrer que : $v_{k+1} - v_k = 0$ si et seulement si la suite (x_k, y_k) est constante.

13. Interpréter au vu de la partie 2. La méthode d'Euler est-elle ici satisfaisante ?

5 Étude informatique

Cette partie consiste à mettre en place des programmes informatiques pour simuler les différents modèles considérés dans le sujet. Bien que cette partie soit largement indépendante des parties précédentes, il est vivement conseillé de les avoir lues. Les programmes sont à rédiger en langage Python. L'annexe 2 page 9 comporte des rappels sur les commandes utiles. Avant chaque algorithme, on écrira brièvement le raisonnement suivi et la formule qu'il est censé calculer.

14. On considère le code :

```python
r = 2

def sol(t):
    return m.exp(r*t)

def liste(T,h):
    t = 0
    L = [0]
    while t+h <= T:
        t = t+h
        L.append(t)
    return L
```

```python

def mystere():
    Lt = liste(20,10**-2)
    n = len(Lt)
    Ls = []
    for k in range(0, n):
        Ls.append(sol(Lt[k]))
    plt.plot(Lt,Ls)
    plt.show()

```

(a) La fonction `exp` est présente dans le module `math`. Indiquer comment charger ce module pour que l'utilisation de `exp` soit correcte dans `sol`.

(b) Que renvoient `liste(1,0.2)` et `liste(1,0.3)` ? Indiquer, de façon générale, ce que renvoie `liste(T,h)`.

(c) Que contient `Ls` dans la fonction mystere ? Que fait cette fonction ?

15. (a) On considère `L=[[3,1],[7],[1,9,8,0]]` :

    i. Que vaut `L[1]` ?

    ii. Que vaut `L[0][1]` ?

    iii. Que vaut `len(L)` ?

    iv. Que vaut `L` après avoir exécuté `L. append(9.75)` ?

(b) Écrire une fonction d'entête `lapin(x,y)` qui renvoie $x - xy$ et une fonction d'entête `lynx(x,y)` qui renvoie $-ay + xy$. La constante a est supposée être préalablement définie dans une variable globale.

(c) On ajoute au code précédent la fonction suivante (où les arguments `x0, y0, T` et `h` définissent respectivement x_0, y_0, l'intervalle d'étude $[0, T]$ et le pas $h > 0$ de la méthode d'Euler définie à la partie 4) :

```python
def resol_1(x0, y0, T, h):
    x = x0; y = y0
    t = 0
    Lx = [x]
    Ly = [y]
    Lt = [t]
    while t+h <= T:
        _____ ligne(s) à compléter _____
    return [Lt, Lx, Ly]

```

Compléter les lignes manquantes dans la boucle, afin que les listes `Lx` et `Ly` contiennent respectivement les x_k et y_k définis par l'équation (8) et que la liste `Lt` contienne les t_k.

(d) On ajoute au code précédent :

```python
x0 = 1; y0 = 0.5; T = 20; h = 10**-2

def trace_pop_1():
    L = resol_1(x0, y0, T, h)
    plt.plot(L[0], L[1])
    plt.plot(L[0], L[2])
    plt.show()
```

Expliquer à quoi correspond chaque ligne de la fonction `trace_pop_1`, en fonction des x_k et y_k de la méthode d'Euler.

(e) L'exécution de trace_pop_1 donne les courbes présentées figure 1. Identifier (avec explications), en lien avec la modélisation effectuée, chacune des deux courbes.

(f) On ajoute au code précédent :

```
def fonctionV(x, y) :
     return x-a*m.log (x)+y-m.log (y)
```

Écrire une fonction d'entête `trace_V_1()` qui effectue la représentation graphique des valeurs v_k en ordonnées, en fonction des valeurs t_k en abscisses.

16. On cherche dorénavant à effectuer une résolution numérique avec une autre méthode, appelée méthode de Heun, où la relation de récurrence définissant les x_k et y_k est :

$$\begin{cases} u_k = x_k + h\left(x_k - x_k y_k\right) \\ w_k = y_k + h\left(-a y_k - x_k y_k\right) \\ x_{k+1} = x_k + \dfrac{h}{2}\left(x_k - x_k y_k + u_k - u_k w_k\right) \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}\left(-a y_k + x_k y_k - a w_k + u_k w_k\right) \end{cases} \tag{9}$$

(a) Écrire une fonction d'entête `resol_2(x0,y0,T,h)`, analogue de `resol_1` utilisant la méthode de Heun.

(b) Que suffit-il de modifier dans la fonction `trace_V_1` pour lui faire utiliser la méthode de Heun ? On appelle `trace_V_2` la fonction ainsi modifiée.

(c) L'exécution de `trace_V_1` et `trace_V_2` donne les courbes présentées en figure 2 : justifier quelle méthode semble la plus satisfaisante.

17. On définit, de manière analogue à la fonction `trace_pop_1`, la fonction `trace_pop_2` associée à la méthode de Heun. L'exécution de `trace_pop_2` donne les courbes présentées figure 3. Comparer les figures 1 et 3. Quel problème numérique est soulevé par la méthode d'Euler ? Que permet d'améliorer la méthode de Heun ?

18. Interpréter l'évolution des dynamiques de population des lièvres et des lynx obtenues.

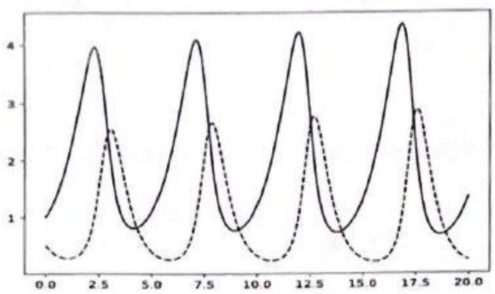


FIGURE 1 - Tracé donné par `trace_pop_1`

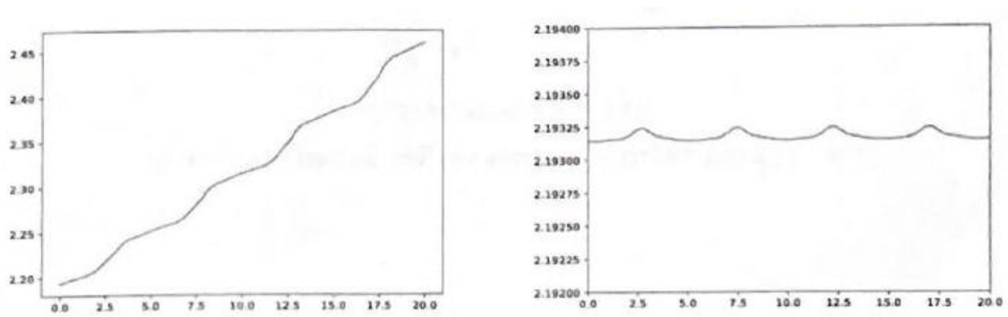


FIGURE 2 - Tracés donnés par `trace_V_1` (à gauche) et par `trace_V_2` (à droite)

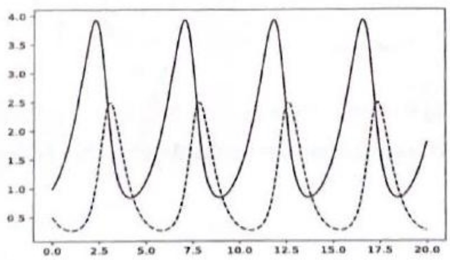


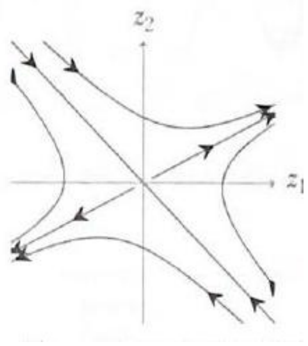
FIGURE 3 - Tracé donné par `trace_pop_2`

Annexe 1 : Allures des solutions d'un système

On considère un système différentiel du type $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = Az$ où $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et A est une matrice inversible constante 2×2 à coefficients réels. L'allure des solutions du système, qui dépend de la nature des valeurs propres de la matrice A, est donnée ci-dessous autour d'un point d'équilibre, dans différents cas. On notera $\Re(\lambda)$ la partie réelle d'un nombre complexe λ et E_λ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

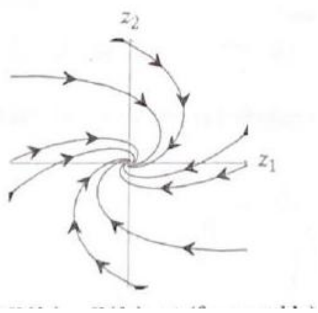
(a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ (noeud stable)

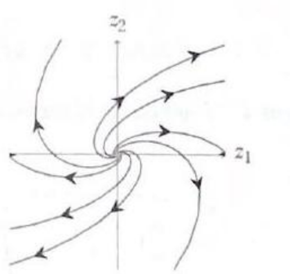
(b) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ (nœud instable)



(c) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (point selle)

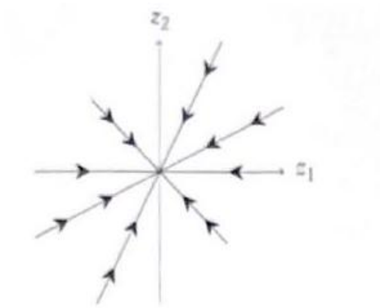
Cas 1 : deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2.



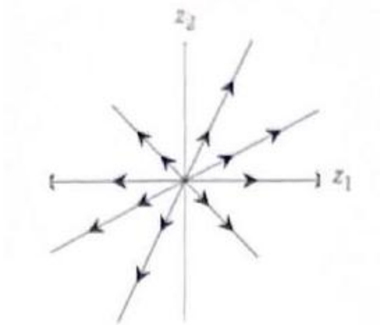


(a) $\Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) < 0$ (foyer stable) (b) $\Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) > 0$ (foyer instable)

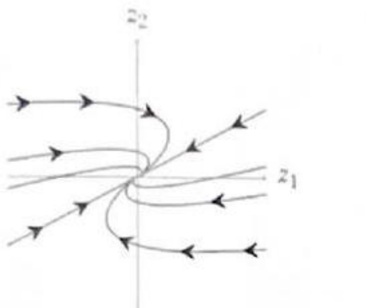
Cas 2 : Deux valeurs propres complexes non réelles λ_1 et λ_2.



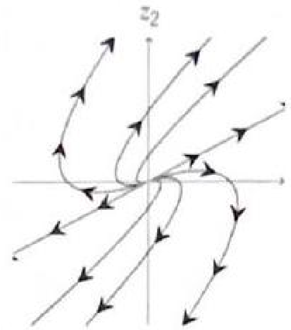
(a) $\lambda < 0$ et $\dim E_\lambda = 2$ (puits)



(b) $\lambda > 0$ et $\dim E_\lambda = 2$ (source)



(c) $\lambda < 0$ et $\dim E_\lambda = 1$ (nœud dégénéré stable)



(d) $\lambda > 0$ et $\dim E_\lambda = 1$ (nœud dégénéré instable)

Cas 3 : Une valeur propre réelle double λ.

Annexe 2 : Rappels de syntaxes Python pour la partie 5

On suppose que le module `matplotlib.pyplot`, qui permet de tracer des graphiques, est importé avec l'alias `plt` ; que le module `math`, qui permet d'utiliser des fonctions mathématiques, est importé avec l'alias `m`. Les variables `Lx` et `Ly` sont deux listes de réels, de même longueur ; la variable `x` est un réel.

- `plt.plot(Lx, Ly)` place les points dont les abscisses sont contenues dans `Lx` et les ordonnées dans `Ly`, et les relie entre eux par des segments. Si cette fonction n'est pas suivie de `plt.show()`, le graphique n'est pas affiché.
- `plt.show()` affiche le(s) tracé(s) précédemment créé(s) par `plt.plot`.
- `m.exp(x)` renvoie $\exp(x)$.
- `m.log(x)` renvoie $\ln(x)$.

Corrigé

1. (a) On a une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants et homogène.
   Les solutions sont donc données par $x\colon t \mapsto Ke^{rt}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
   Avec la condition initiale, on obtient alors
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ x(t) = x_0 e^{rt}.$$
   (b) TODO
   (c) Avec ce modèle, la population de lièvre croît indéfiniment, de façon exponentielle, ce qui est impossible en pratique.

2. (a) Si x est petit, alors on peut négliger le terme $1 - \frac{x}{K}$, et on retrouve alors l'équation (1). On doit donc avoir une forme exponentielle pour la courbe.
   (b) x et r sont strictement positifs, et $1 - \frac{x}{K}$ est strictement positif si et seulement si $0 < x < K$.
   Ainsi, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ est positif si $0 < x < K$, négatif si $x > K$ et nul si $x = 0$ ou $x = K$.
   (c) Supposons que x s'annule en $t > 0$.
   Alors le problème de Cauchy composé de l'équation (2) et de la condition $x(t) = 0$ a deux solutions : x et la fonction nulle.
   Par unicité de la solution, on a donc $x = 0$, ce qui est incompatible avec la condition $x(0) > 0$.
   (d) Comme x ne s'annule pas, la fonction z est bien dérivable, et
   $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{x^2}\\ &= -\frac{rx\left(1-\frac{x}{K}\right)}{x^2}\\ &= -\left(\frac{r}{x} - \frac{r}{K}\right)\\ &= \frac{r}{K} - rz\end{aligned}$$
   (e) On a une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants, dont les solutions sont données par
   $$z\colon t \mapsto \frac{1}{K} + \lambda e^{-rt}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
   Avec la condition initiale, on a donc
   $$\forall t,\ z(t) = \frac{1}{K} + \left(z_0 - \frac{1}{K}\right)e^{-rt}.$$
   (f) On en déduit alors
   $$\forall t,\ x(t) = \frac{1}{\frac{1}{K} + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{K}e^{-rt}\right)}.$$
   (g) Quand t tend vers $+\infty$, on a donc $x(t) \to K$.
   (h) TODO
   (i) Avec la modélisation (2), la population est bornée. K représente alors un point d'équilibre vers lequel tend la population.

3. (a) Si y est nulle, alors on retrouve l'équation (1) : la population de lièvre croît exponentiellement.
   (b) Si x est nulle, le système se réduit à l'équation $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -my$, et donc la population de lynx décroît exponentiellement.

4. On a alors, par théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\\ &= \frac{q}{r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{1}{r}\\ &= \frac{q}{r^2}(rx - pxy)\\ &= \overline{x} - \overline{xy}\end{aligned}$$

   On trouve l'autre équation de la même façon.

5. (a) Soit donc (x, y) un point d'équilibre. La première équation nous donne donc $x = 0$ ou $y = 1$. Dans le premier cas, on retrouve $y = 0$, et dans le second $x = a$.
   (b) Ces points d'équilibres correspondent alors aux valeurs de x et y où les population évolue très peu.
   (c) À ces points d'équilibres, soit tous les animaux ont disparu, donc le système n'évolue plus, soit les mortalités sont compensées par les natalités, et les populations restent stables.

6. (a) La fonction f_c est dérivable, de dérivée $f_c'\colon u \mapsto 1 - \frac{c}{u}$.
   La fonction f_c est donc strictement croissante sur $[c, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, c]$. Elle atteint donc son minimum en $u = c$, qui vaut $c(1 - \ln c)$.
   (b) On a vu à la question précédente que le minimum n'est atteint qu'en $u = c$.
   (c) La fonction f_c est continue sur $\mathbb{R}_+$, strictement décroissante sur $]0, c[$ et strictement croissante sur $]c, +\infty[$. De plus, $\lim\limits_{u\to 0} f_c(u) = \lim\limits_{u\to+\infty} f_c(u) = +\infty$.
   Ainsi, par théorème de la bijection, l'équation $f_c(u) = M$ possède exactement deux solutions, l'une b sur $]0, c[$ et l'autre B sur $]c, +\infty[$.
   Si $b \leqslant u \leqslant B$, on a bien $f_c(u) \leqslant M$, et sinon $f_c(u) > M$. D'où l'équivalence demandée.

7. (a) i. On note que $V(x, y) = f_a(x) + f_1(y)$, et par 6a, $f_1(y) \geqslant 1$.
   On a donc $V(x(s), y(s)) \geqslant f_a(x(s)) + 1$ et on retrouve l'inégalité demandée.
   On trouve de même l'autre inégalité.
   ii. Soit $\varphi\colon s \mapsto V(x(s), y(s))$. Alors φ est dérivable, et par dérivation des fonctions composées, on a

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}(s)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x(s), y(s)) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}(s)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}(x(s), y(s))\\ &= (x(s) - x(s)y(s))\left(1 - \frac{a}{x(s)}\right) + (-ax(s) + x(s)y(s))\left(1 - \frac{1}{y(s)}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

   La fonction est donc bien constante.
   iii. Par les questions 6c et 7ai, on a donc bien les encadrement demandés.
   (b) On a déjà vu que $V(x, y)f_a(x) + f_1(y)$, et par 6a,

$$V(x, y) \geqslant a(1 - \ln a) + 1,$$

   avec égalité si et seulement si $x = a$ et $y = 1$ par 6b.
   (c) i. Par 7aiii, les populations sont bornées entre $b > 0$ et B et donc ne peuvent ni s'éteindre, ni devenir arbitrairement grandes.
   ii. Si $x = x^*$ et $y = y^*$, alors le système n'évolue pas.
   iii. On peut envisager soit un système qui n'évolue pas, soit des fonctions x et y périodiques.

8. TODO

9. TODO

10. TODO

11. On a donc

$$\begin{aligned} v_{k+1} - v_k &= x_{k+1} - a\ln(x_{k+1}) + y_{k+1} - \ln(y_k) - x_k + a\ln(x_k) - y_k + \ln(y_k) \\ &= x_k + hx_k - hx_k y_k - a\ln(x_k) - a\ln(1 + h - hy_k) + y_k - ahy_k + hx_k y_k - \ln(y_k) \\ &\quad - \ln(1 - ha + hx_k) - x_k + a\ln(x_k) - y_k + \ln(y_k) \\ &= hx_k - a\ln(1 + h - hy_k) - ahy_k - \ln(1 - ha + hx_k) \end{aligned}$$

12. (a) On montre facilement que pour tout x, $\ln(1+x) \leqslant x$, avec égalité si et seulement si $x = 0$. On en déduit donc que
$$-a\ln(1 + h - hy_k) - ahy_k \geqslant -ah,$$
et
$$hx_k - \ln(1 - ha + hx_k) \geqslant ah.$$
En ajoutant ces deux inégalités, on trouve le résultat voulu.

    (b) D'après le cas d'égalité vu dans la question précédente, on a donc égalité si et seulement si $h - hy_k = 0$ et $hx_k - ha = 0$, soit $y_k = 1$ et $x_k = a$.

13. En remplaçant x et y par les suites (x_k) et (y_k), on ne retrouve plus la conservation de V vue en 7aii.

14. (a) Il suffit de taper l'instruction

```python
import math as m

```

    (b) La commande `liste(1,0.2)` renvoie `[0,0.2,0.4,0.6,0.8,1]` et `liste(1,0.3)` renvoie `[0,0.3,0.6,0.9]`.
De façon générale, `liste(T,h)` renvoie une liste contenant des valeurs, partant de 0, avec un pas de `h`, la dernière valeur étant le plus grand multiple de `h` inférieur à `T`.

    (c) La liste `Ls` contient les valeurs des images des éléments de `Lt` par la fonction `sol`.
Cette fonction trace donc une approximation de la courbe de la fonction $t \mapsto e^{rt}$.

15. (a) i. `L[1]` vaut `[7]`.
    ii. `L[0][1]` vaut `1`.
    iii. `len(L)` vaut 3
    iv. Après exécution, `L` vaut `[[3,1],[7],[1,9,8,0],9.75]`.

    (b) On propose

```python
def lapin(x,y):
    return x-x*y

def lynx(x,y):
    return -a*y+x*y

```

    (c) On complète :

```python
def resol_1(x0, y0, T, h):
    x = x0; y = y0
    t = 0
    Lx = [x]
    Ly = [y]
    Lt = [t]
    while t+h <= T:
        x,y = x+h*(x-x*y), y+h*(-a*y+x*y)
        t = t+h
```

```python
            Lx.append(x)
            Ly.append(y)
            Lt.append(t)
    return [Lt, Lx, Ly]

```

(d) La première ligne de `trace_pop_1` permet de récupérer les trois listes (t_k), (x_k) et (y_k).
La deuxième ligne trace la population de lapins en fonction du temps.
La troisième ligne trace la population de lynx en fonction du temps.
La quatrième ligne affiche les courbes.

(e) La population de lapins part de $x_0 = 1$, donc correspond à la courbe en trait plein. Celle de lynx correspond donc à la courbe en pointillés.

(f) On propose

```python
def trace_V_1():
    Lt,Lx,Ly = resol_1(x0,y0,T,h)
    Lv = []
    for i in range(len(Lt)):
        Lv.append(fonctionV(Lx[i],Ly[i]))
    plt.plot(Lt,Lv)
    plt.show()

```

16. (a) On propose

```python
def resol_2(x0,y0,T,h):
    x = x0; y = y0
    t = 0
    Lx = [x]
    Ly = [y]
    Lt = [t]
    while t+h<=T:
        u = x+h*(x-x*y)
        v = y+h*(-a*y-x*y)
        x,y = x+(h/2)*(x-x*y+u-u*w), y+(h/2)*(-a*y+x*y-a*w+u*w)
        t=t+h
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
        Lt.append(t)
    return [Lt, Lx, Ly]

```

(b) Il suffit alors de remplacer `resol_1` à la première ligne par `resol_2`.

(c) La courbe de V avec la méthode Heun semble être plus proche d'être constante, et donc cette méthode semble plus satisfaisante.

17. Dans la figure 1, les pics de population sont de plus en plus grand, et semblent tendre vers $+\infty$, ce qui contredit le résultat de 7ci. Ce problème n'est pas présent avec la méthode de Heun, qui permet de ne pas cumuler les erreurs comme peut le faire la méthode d'Euler.

18. Comme prévu en 7ciii, les populations sont des courbes périodiques :

- avec beaucoup de lapins et peu de lynx, la population de lapins croît rapidement
- la présence de beaucoup de lapin favorise la reproduction des lynx
- le grand nombre de lynx diminue la population de lapin
- la diminution du nombre de lapin entraîne la diminution du nombre de lynx