

Théorèmes limites et statistiques

Théorèmes limites

On pourra utiliser la commande `plt.hist` pour tracer les résultats sous forme d'histogramme.

Exercice 1

Illustrer la convergence de la loi binomiale vers une loi de Poisson.

On pourra utiliser les commandes `binomial` et `poisson` du module `numpy.random`.

Exercice 2

Illustrer le théorème de Moivre Laplace, en simulant des variables binomiales dont le paramètre n augmente.

Tests d'hypothèses

Dans cette partie, on importera le module `scipy.stats` sous le nom `s`.

Exercice 3

Implémenter le test de conformité à la moyenne vu en cours.

On pourra utiliser la commande `s.norm.ppf` pour calculer les quantiles de la loi normale.

On va maintenant implémenter le test de Student, qui sert à comparer des moyennes dans le cas de petits échantillons, où le théorème central limite ne peut être appliqué.

On suppose donc qu'on a un échantillon $X = (X_1, \dots, X_n)$, supposé Gaussien; on souhaite tester l'hypothèse $\mu = \mu_0$, où μ est la moyenne de la population, et μ_0 la valeur à tester.

On définit alors la statistique : $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S}{n}}}$, où $\bar{X}$ et S sont respectivement les espérances et variances empiriques de X .

On compare alors la valeur de $|t|$ avec le quantile $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ de la loi de Student à $n - 1$ degrés de libertés, qu'on peut calculer avec la commande `s.t.ppf` :

- si $|t|$ est supérieur à cette valeur, on rejette l'hypothèse
- sinon, on l'accepte.

Exercice 4

Implémenter ce test.

On peut aussi utiliser ce test pour comparer les moyennes de deux échantillons, indépendants, avec des variances égales.

On considère donc deux échantillons X_1 et X_2 , de tailles respectives n_1 et n_2 , de moyennes μ_1 et μ_2 et écart-types s_1 et s_2 .

On pose alors $t = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S_{1,2}}}$, où $S_{1,2} = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$.

Il suffit alors de comparer $|t|$ avec le quantile $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ de la loi de Student à $n_1 + n_2 - 2$ degrés de libertés.

Exercice 5

Implémenter ce test.